

В.Н. Блохин, Н.А. Вerezубова

Теоретическая механика

«Статика»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Брянск 2013

УДК 531.8(07)
ББК 22.21
Б 70

Блохин, В.Н. **Теоретическая механика: УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**/ В.Н. Блохин, Н.А. Вerezубова. – Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2013. - 148 с.

Книга представляет собой учебно-методическое пособие по теоретической механике раздел «Статистика», которое полностью включает материал, предусмотренный примерной программой для бакалавров высших технических учебных заведений.

Учебно - методическое пособие составлено в соответствии с требованиями федерального компонента к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по циклам ЕН (общие математические и естественно – научные дисциплины), ОПД (общие профессиональные дисциплины), а так же позволяет приобрести необходимые знания и навыки в применении к решению конкретных задач и прикладных вопросов.

Рецензенты: док. тех. наук, профессор Михальченко А.М.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета от 8 февраля 2013 г., протокол № 6.

© В.Н. Блохин, 2013
© Н.А. Вerezубова, 2013
© Брянская ГСХА, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Предмет механики и его значение в современной технике и естествознании

Теоретическая механика – наука об общих законах механического движения материальных тел и их взаимодействия.

Механическое взаимодействие – это силовое действие одних тел на другие.

Под *механическим движением* понимают изменение положения материальных тел в пространстве и во времени.

Теоретическая механика служит базой на основе которой изучают ряд общетехнических и специальных дисциплин, таких, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, подъемно-транспортные устройства, сельскохозяйственные машины, тракторы и автомобили, машиностроение и приборостроение, авиация и космонавтика, автоматика и кибернетика и т.п.

Теоретическая механика зарождалась в глубокой древности с развитием культуры человечества. Родоначальником механики считается выдающийся ученый и практик, живший задолго до нашей эры, Архимед (287-212 гг. до нашей эры). Он рассмотрел задачи о равновесии рычага, определении центра тяжести тела. Им было предложено множество различных технических устройств и сооружений, особенно, в области военной техники. Знаменитый закон Архимеда, основной закон гидростатики, имеет большое значение в технике и в наши дни.

Знаменитые ученые Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.), Николай Коперник (1473-1543 гг.), Галилео Галилей (1564-1642 гг.), Иоганн Кеплер (1571-1630 гг.), Рене Декарт (1596-1650 гг.), Х. Гюйгенс (1629-1695 гг.), Исаак Ньютон (1643-1727 гг.), П. Вариньон (1654-1722 гг.), И. Бернулли (1667-1748 гг.), Ж. Даламбер (1717-1783 гг.), Ж. Ланграж (1736-1813 гг.), Л. Пуансо (1788-1867 гг.), Г. Кариолис (1792-1843), М. Ломоносов (1711-1765 гг.), Л. Эйлер (1707-1783 гг.), М.В. Остроградский (1801-1862 гг.), П.Л. Чебышев (1821-1894), А.М. Ляпунов (1857-1918 гг.), С.В. Ковальская (1850-1891 гг.), И.В. Мещерский

(1859-1935 гг.), Н.Е. Жуковский (1847-1921), С.А. Чаплыгин (1869-1942 гг.), К.Э. Циолковский (1857-1935 гг.), В.П. Горячкин (1888-1935 гг.), С.П. Королев (1907-1966 гг.) внесли неоценимый вклад в развитие механики во всех областях науки и техники, дали толчок научно-техническому прогрессу.

Данный курс лекций является пособием для студентов высших технических сельскохозяйственных учебных заведений специальностей:

- механизации сельского хозяйства – 110301,
- механизации переработки сельскохозяйственной продукции – 110303,
- технологии обслуживания и ремонта машин в АПК – 110304,
- электрификации и автоматизации сельского хозяйства – 110302,
- машины и оборудование природообустройства и защиты окружающей среды – 190207.

Традиционно теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В *статике* рассматриваются условия равновесия материальных тел под действием приложенных сил. В *кинematике* изучается движение тел с геометрической точки зрения, рассматривая лишь кинематические параметры движения – траектории, скорости, ускорения и др. В *динамике* изучают движение материальных объектов под действием сил.

Нет ни одной области человеческой деятельности, в которой не применялись бы знания, полученные при изучении курса теоретической механики.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава I

§ 1. Основные понятия и определения статики

Статикой называется раздел механики, в котором рассматривают учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, к которым приложены действующие силы.

Под *равновесием* тела понимается состояние покоя его по отношению к другим телам (к Земле).

При изучении условий равновесия будем иметь дело с недеформируемыми или абсолютно твердыми телами.

Абсолютно твердым телом называется такое тело, которое не меняет своих размеров под действием приложенных к нему сил.

Мерой механического воздействия одного тела на другое является величина, называемая *силой*.

Сила – величина векторная и определяется:

- 1) числовым значением или модулем;
- 2) направлением силы;
- 3) точкой приложения силы.

В механике силу изображают в виде вектора (рис. 1) и обозначают какой-

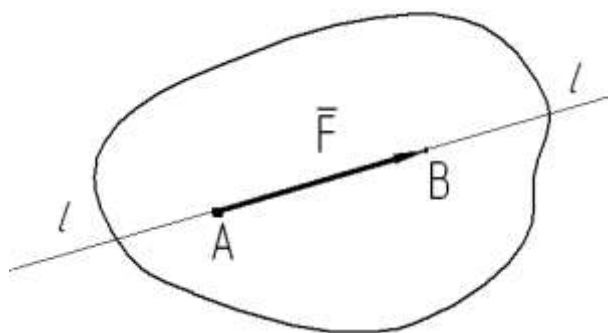


Рис. 1

либо буквой латинского алфавита с чертой или стрелкой над ней (например, \bar{F} , \vec{P}). Прямую l – l , вдоль которой действует сила, называют линией ее действия. Модуль силы обозначают символом $|\bar{F}|$ или той же буквой, но без черты над нею (F).

Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ) является 1 Ньютон (1Н). Более крупная единица 1 килоньютон (1 кН = 1000 Н).

Следующие определения:

1. **Системой сил** называется совокупность сил, приложенных к твердому телу.
2. **Плоская система сил** – это система, линии, действия которой лежат в одной плоскости.
3. **Пространственная система сил** – это система, линии, действия которой расположена в пространстве.
4. **Система сходящихся сил** – это система сил, линии, действия которых проходят через одну точку (рис. 2).
5. **Система произвольно расположенных сил** – это система, линии, действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке.

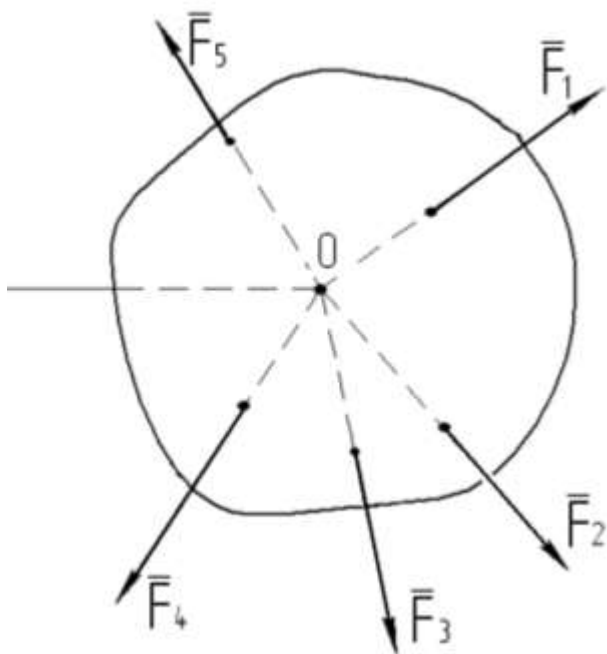


Рис. 2

6. **Система параллельных сил** – это система сил, линии действия которой параллельны друг другу.
7. **Свободное тело** – это тело, свобода движения которого в пространстве ничем не ограничена.
8. **Несвободным телом** называется такое тело, свобода движения которого ограничена другими телами.
9. **Эквивалентные системы сил** – это системы сил, заменяющие друг друга при действии на твердое тело, не меняя его кинематического состояния.
10. **Кинематическое состояние тела** – это состояние покоя или движения тела, при котором точки тела имеют некоторые скорости и ускорения.
11. **Уравновешивающей или эквивалентной нулю системой сил** называется

такая система, которая, действуя на свободное тело, не меняет его кинематическое состояние.

12. **Равнодействующей** данной системы сил называется сила, эквивалентная этой системе сил.
13. **Уравновешивающей силой** называется такая сила, которая равна по модулю равнодействующей, прямо противоположна по направлению и действует вдоль той же прямой.
14. **Внешними силами** называются силы, которые действуют на тело (или на тела) со стороны других тел.
15. **Внутренними силами** называются силы, действующие на все точки данного тела (или системы тел) или силы взаимодействия между материальными точками.
16. **Сосредоточенной силой** называется такая сила, которая приложена к телу в какой-нибудь одной его точке.
17. **Распределенными силами** называются такие силы, которые действуют на все точки данной линии, поверхности или объема тела (рис. 3 и 4).

$$dQ = qdx$$

$$Q = \int_0^L q(x)dx \quad (1)$$

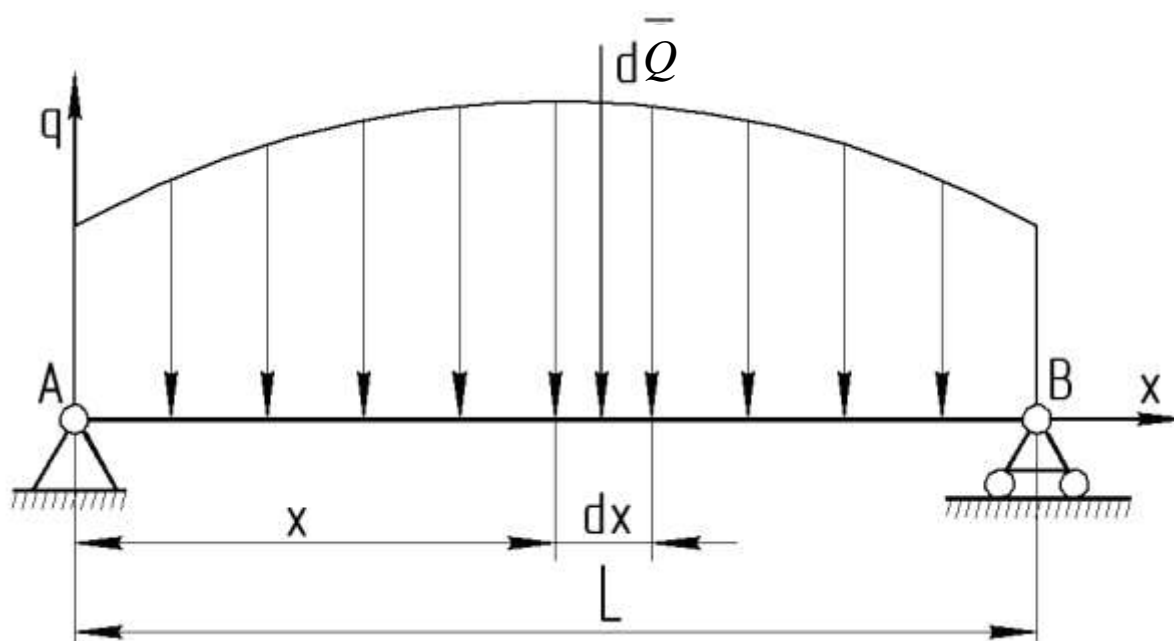


Рис. 3

На рис. 3 показано действие линейно распределенной нагрузки.

Механической мерой действия распределенной нагрузки служит интенсивность q , представляющая собой величину силы, приходящуюся на единицу длины

$$q = \frac{F}{l} \text{ (Н/м)}. \quad (2)$$

Если $q = \text{const}$ по длине балки, то такую нагрузку называют **равномерно распределенной**.

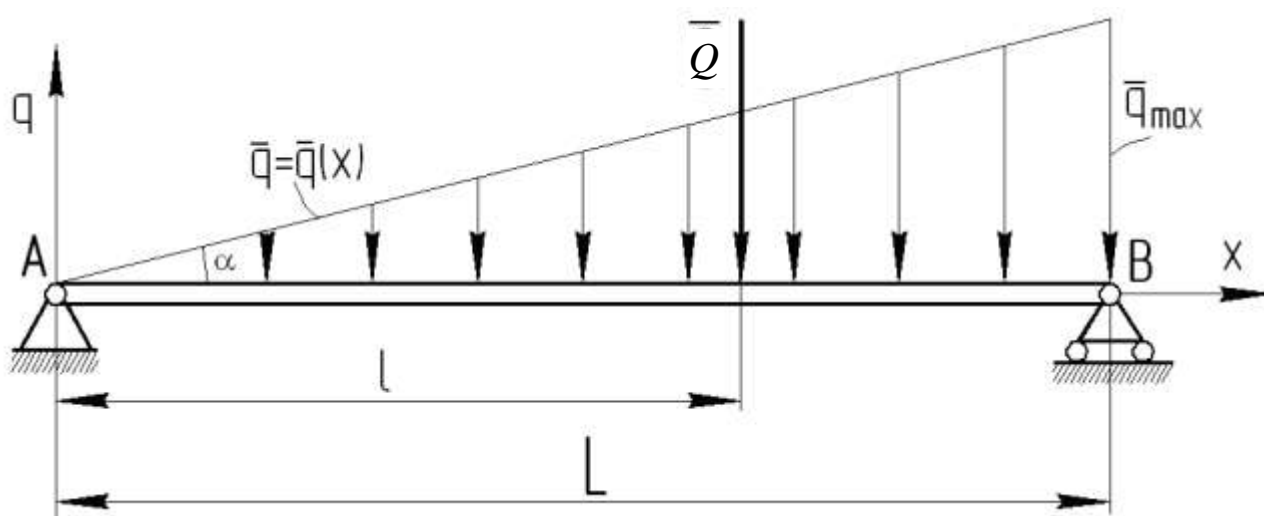


Рис. 4

Для случая, изображенного на рис. 4 при $q = kx$ - линейная зависимость $k = \frac{q}{x} = \text{tg } \alpha$, тогда $q_{\max} = kL$ и $Q = L \cdot \frac{q_{\max}}{2}$, что равно площади эюры. Тогда рас-

стояние l будет равняться $l = \frac{\int_0^L xkx dx}{Q} = \frac{\frac{1}{3}kL^3}{\frac{1}{2}kL^2} = \frac{2}{3}L$. Понятие о сосредоточенной

силе является условным, так как приложить силу к телу в одной точке нельзя.

§ 2. Аксиомы статики

Аксиомы статики представляют собой законы окружающей нас действительности, которые были установлены людьми опытным путем и подтверждены многовековой практикой.

Основными аксиомами статики (законами Галилея – Ньютона) являются:

Аксиома 1 (закон инерции). Материальная точка (тело) находится в покое или совершает равномерное прямолинейное движение, если на нее действует уравновешенная система сил.

Аксиома 2. Твердое тело находится в равновесии под действие двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 5).

Аксиома 3. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней присоединить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: действие силы на тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела (рис. 6).

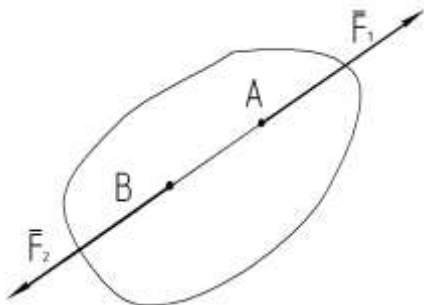


Рис. 5

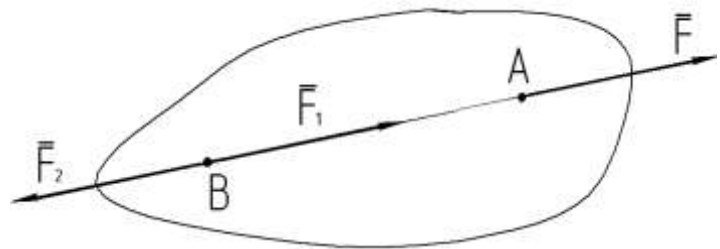


Рис. 6

Вектор \vec{F} можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы. Такой вектор считается *скользящим*.

Аксиома 4. Закон параллелограмма сил: равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис. 7).

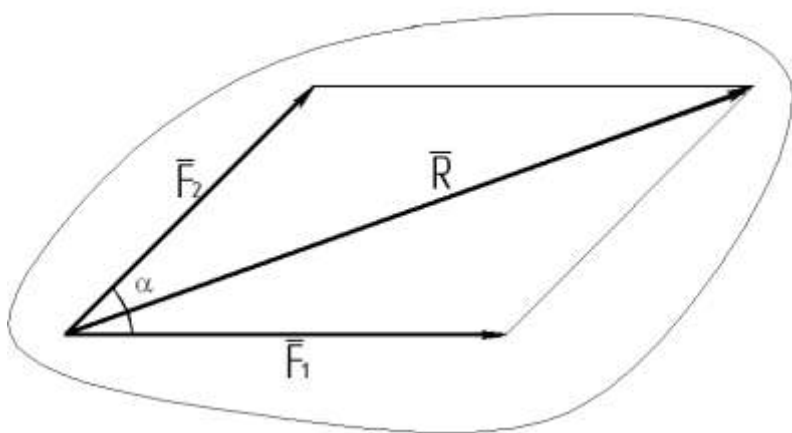


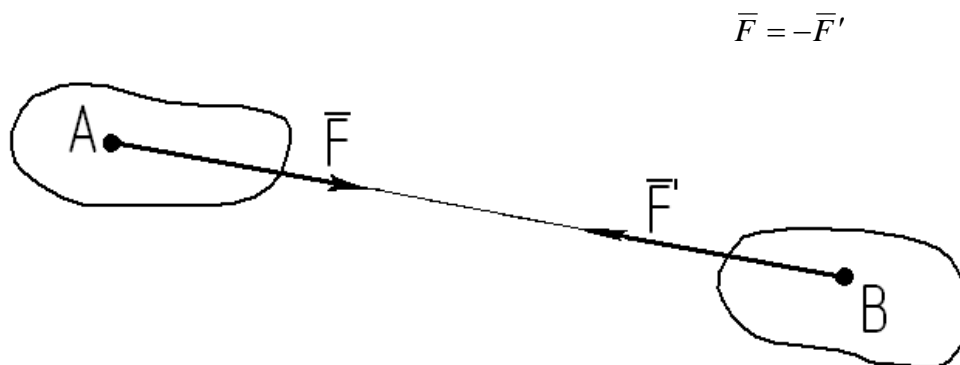
Рис. 7

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Вектор \bar{R} - геометрическая сумма векторов \bar{F}_1 и \bar{F}_2 . Модуль этой равнодействующей определяется по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Аксиома 5. Закон равенства действия и противодействия: два тела взаимодействуют друг с другом с силами равными по величине и противоположными по направлению (рис. 8).



$$\bar{F} = -\bar{F}'$$

Рис. 8

Это один из основных законов механики. Это значит, что если тело А действует на тело В с силой \bar{F} , то одновременно тело В действует на тело А с такой же по модулю силой \bar{F}' , но направленной в противоположную сторону. Причем силы \bar{F} и \bar{F}' лежат на одной прямой.

Следует иметь в виду, что силы \bar{F} и \bar{F}' не составляют уравновешенную систему сил, так как приложены к разным телам.

Свойство внутренних сил. Две любые части тела или конструкция действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами. То есть все внутренние силы образуют уравновешенную систему сил, которую можно отбросить. Поэтому при изучении условия равновесия будем учитывать только **внешние** силы.

Аксиома 6. Принцип отвердевания: равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым). Например, равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом.

Этот принцип используется в инженерных расчетах для таких тел как ремень, трос, цепь, канат и т.д.

§ 3. Связи и их реакции

Тело, совершающее любое перемещение в пространстве, называется **свободным**. Тело, у которого ограничено перемещение в пространстве другими телами, называется **несвободным**. Тела, которые ограничивают перемещение данного тела в пространстве, называются **связями**. Например, подвешенная дверь, стул, стоящий на полу и т.п. Для двери связями являются петли; для стула – пол.

Тело, стремясь осуществить перемещение под действием приложенных сил, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой силой давления на связь. По аксиоме о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакции связи или просто **реакцией связи**.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда бы двигалось тело при отсутствии связи.

Определение направления реакций связей имеет большое значение при решении задач механики. Рассмотрим направление основных видов связей.

1. Гладкая поверхность

Гладкая поверхность – это отсутствие трения и тело не может перемещаться только по нормам. Поэтому реакция \bar{N} гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхности (рис. 9).

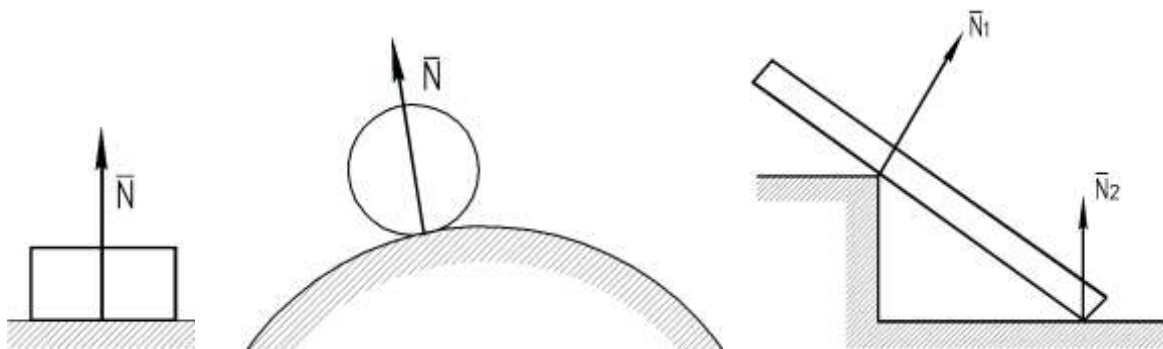


Рис. 9

2. Гибкая связь (нить, канат, трос, цепь)

Реакция гибкой связи \bar{T} направлена вдоль связи от удерживаемого тела к точке подвеса (рис. 10).

3. Неподвижный цилиндрический шарнир

Реакция \bar{R} цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (рис. 11). При решении задач удобно силу реакции \bar{R} , неизвестную ни по модулю R , ни по направлению, разлагать на две составляющие \bar{R}_x и \bar{R}_y , направленные по осям координат Ax и Ay :

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

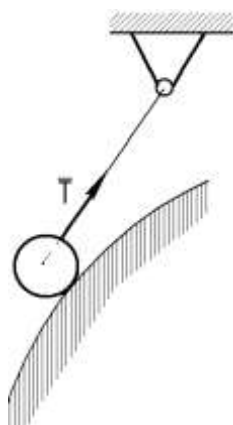


Рис. 10

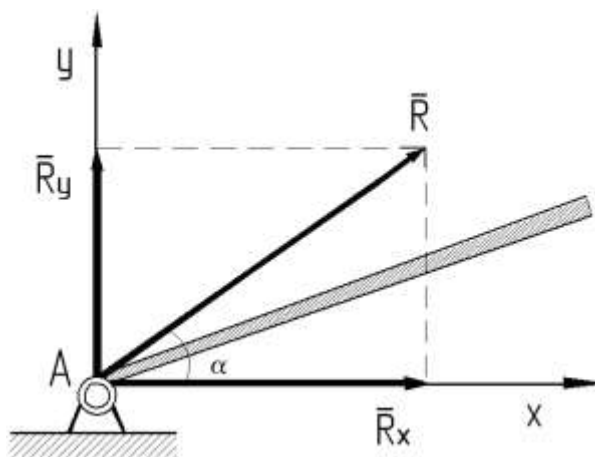


Рис. 11

Найдя составляющие \bar{R}_x и \bar{R}_y находят модуль полной реакции \bar{R} и углы, которые реакция \bar{R} составляет с осями x и y .

4. Сферический шарнир и подпятник

Реакция \bar{R} сферического шарнира и подпятника может иметь любое направление в пространстве (рис. 12).

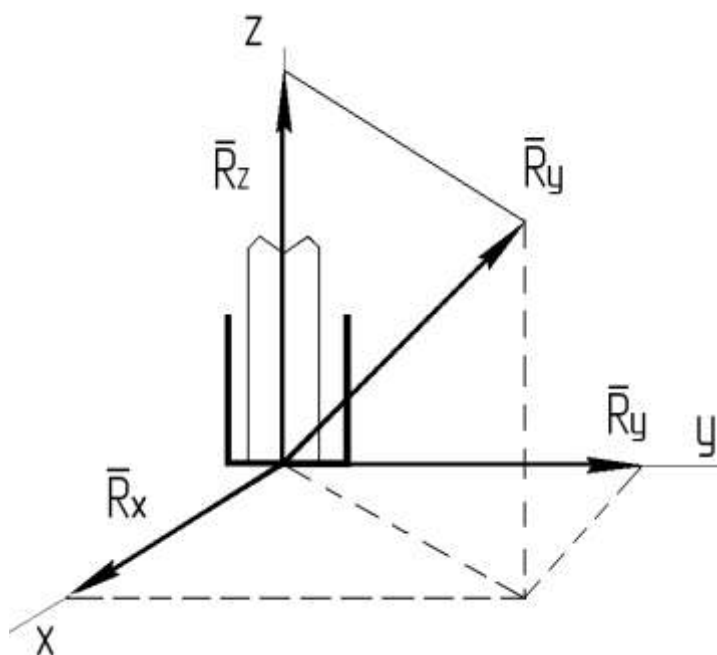


Рис. 12

Для силы реакции \bar{R} неизвестны ни ее модуль, ни углы с осями $Axyz$. При решении задач реакцию \bar{R} раскладывают на три составляющие по осям x, y, z : R_x, R_y, R_z и по найденным составляющим подсчитывают модуль реакции R , а также углы, которые реакция составляет с осями координат:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

5. Невесомый стержень

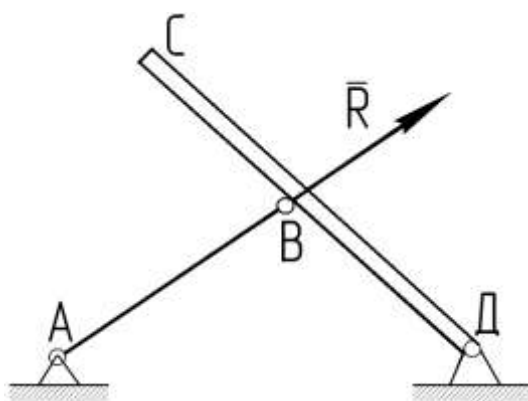


Рис. 13

Невесомым стержнем называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. AB – тонкий стержень. На тонкий стержень будут действовать две силы, приложенные в точках A и B . Если балка CD находится в равновесии, то эти две силы должны быть направлены вдоль прямой AB .

Согласно аксиоме действия и противодействия тонкий стержень AB с шарнирами на концах будет действовать на балку CD с силой, направленной вдоль AB . Следовательно, реакция \bar{R} невесомого стержня AB с шарнирами на концах будет направлена вдоль стержня, сжимая или растягивая его (рис. 13).

6. Подвижный цилиндрический шарнир (катковая опора)

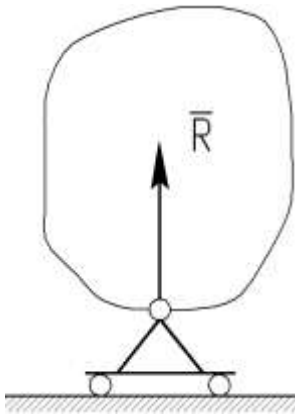


Рис. 14

Цилиндрический шарнир представляет собой втулку с осью (рис. 14). Если втулка закреплена на подвижной опоре с катками, то давление оси на втулку заставляет такую конструкцию перемещаться по поверхности качения. Значит сила реакции \bar{R} (сила, с которой ось давит на втулку) перпендикулярна к плоскости качения.

7. Негладкая поверхность

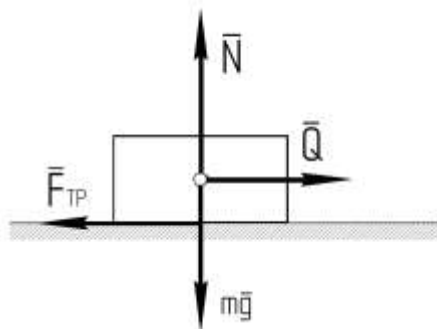


Рис. 15

При движении тела по негладкой поверхности возникает сила трения $\bar{F}_{тр}$, которая направлена в противоположную сторону движения (рис. 15).

8. Жесткая заделка балки

На заделанный конец балки в стену в ее поперечном сечении действует со стороны заделанного конца система распределенных сил (реакций). Если считать эти силы приведенными к центру C , то можно их заменить одной неизвестной силой \bar{R}_C , приложенной в этой точке, и парой с неизвестным моментом M_C . Для решения задач силу \bar{R}_C удобно разложить на ее составляющие \bar{X}_C и \bar{Y}_C (рис. 16 а, б).

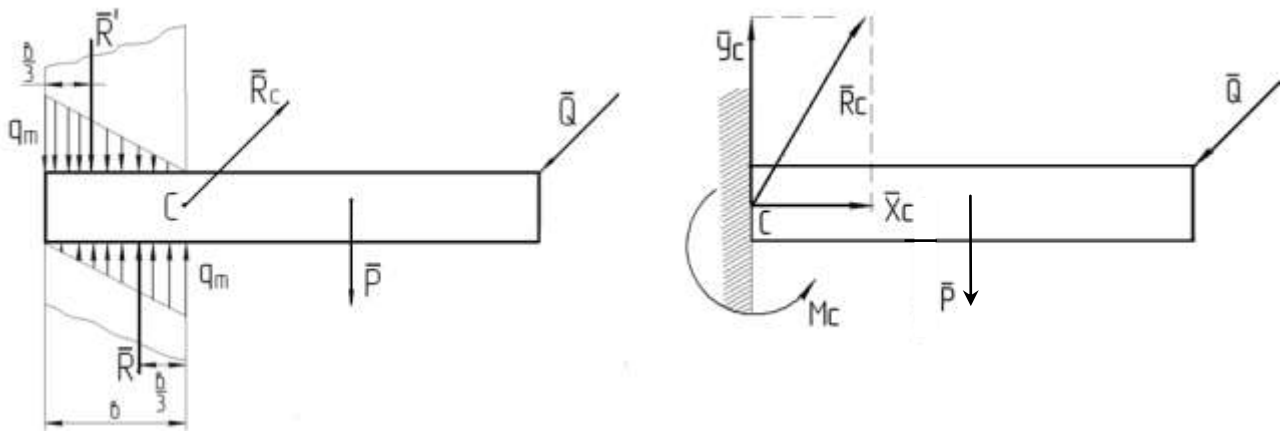


Рис. 16

Для решения с жесткой заделкой надо определить три неизвестные величины X_C , Y_C , M_C .

9. Скользящая заделка

Это такое шарнирное соединение оси с втулкой, при котором ограничивается поперечный поворот оси в любой плоскости. В этом случае на ось со стороны втулки действует неизвестная сила реакции \bar{Y}_A перпендикулярная оси и пара сил с неизвестным моментом M_A (рис. 17). Таким образом, для определения реакции скользящей заделки, надо найти две неизвестные наперед заданные величины \bar{Y}_A и M_A .

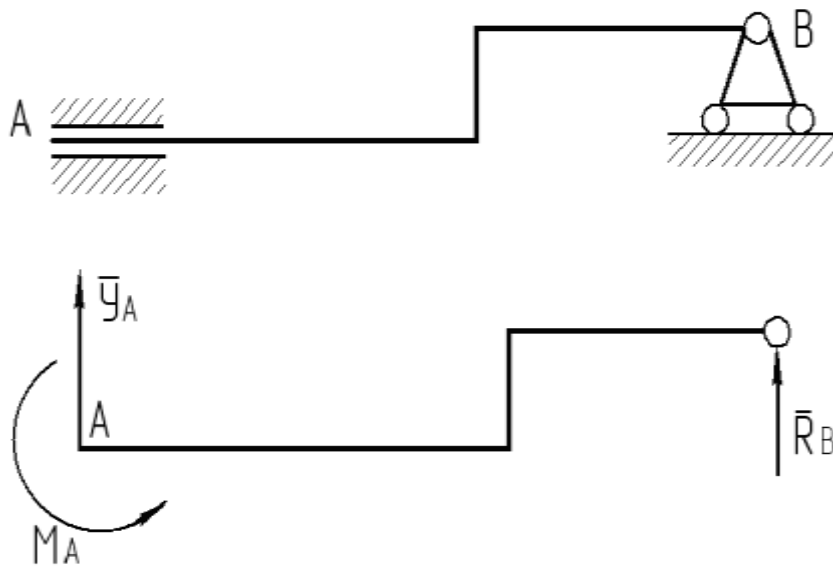


Рис. 17

10. Бискользкая заделка

Бискользкая заделка A это такое соединение оси и втулки, при котором одно тело не может вращаться относительно другого в плоскости действия сил и пар сил. В этом случае на втулку со стороны оси действует лишь одна неизвестная реакция – пара сил с моментом M_A (рис. 18).

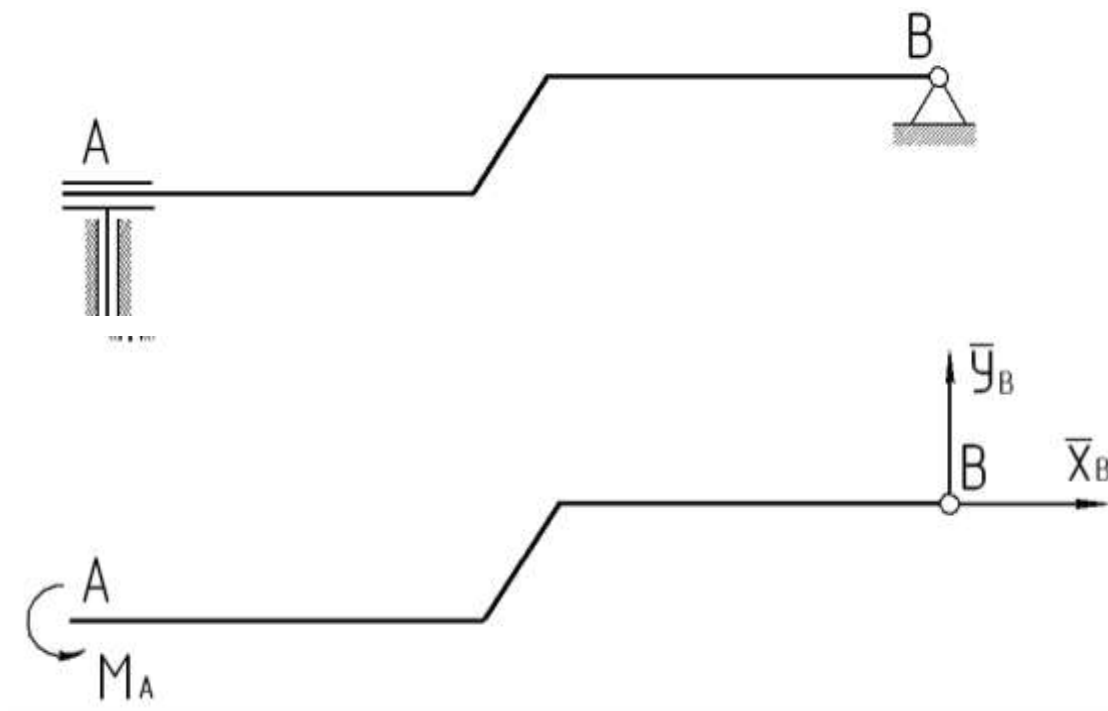


Рис. 18

Глава II

СЛОЖЕНИЕ СИЛ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 4. Распределение силы

Часто в инженерных задачах приходится сталкиваться с нагрузками, распределенными вдоль поверхности по определенному закону.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью q , q есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

1) Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой (рис. 19). В

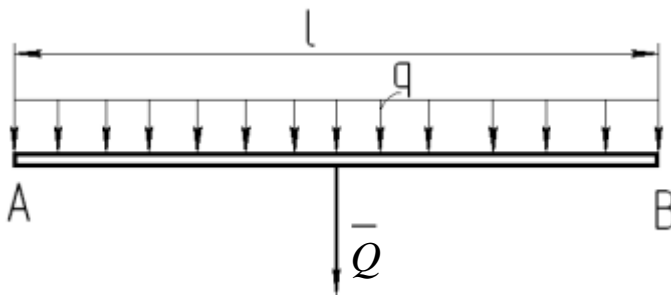


Рис. 19

этом случае q имеет постоянное значение. Эту систему сил можно заменить одной равнодействующей \bar{Q} , которая приложена в середине отрезка АВ. По модулю

$$Q = q \cdot l \quad (1)$$

2) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону

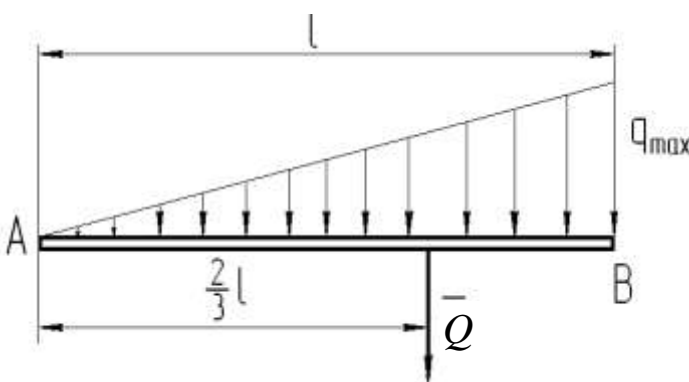


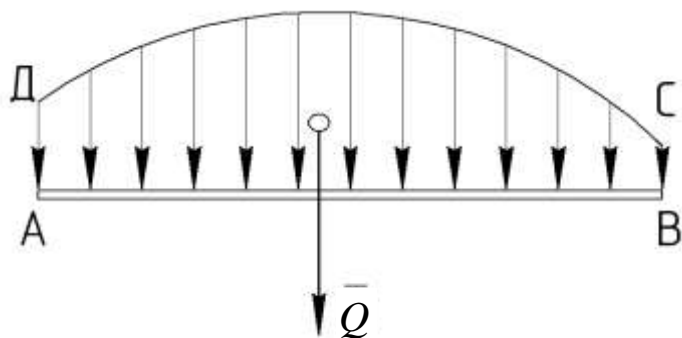
Рис. 20

(рис. 20). Интенсивность q является величиной переменной, изменяющейся от 0 до q_{\max} . Равнодействующая таких сил, по аналогии с силой тяжести треугольника, определяется

$$Q = 0,5 \cdot q \cdot l \quad (2)$$

Примером может служить сила давления воды на плотину. Приложена сила \bar{Q} на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от точки A .

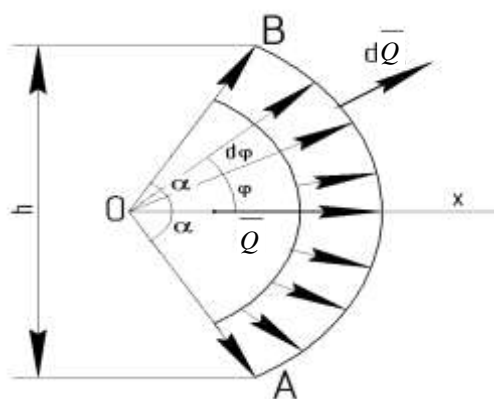
3) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону



(рис. 21). Равнодействующая \bar{Q} таких сил, по аналогии с силой тяжести, по модулю равна площади фигуры $ABCD$ и проходит через центр тяжести этой площади.

Рис. 21

4) Силы, равномерно распределенные по дуге окружности (рис. 22).



Например, гидростатические силы давления на боковые стенки цилиндрического сосуда. Если радиус дуги равен R , а угол $BOA = 2\alpha$ и ось Ox - ось симметрии, то равнодействующая \bar{Q} направлена по оси симметрии (по оси Ox) и при этом численно

$$Q = Q_x.$$

Рис. 22

Для определения величины Q выделим на дуге элемент, положение которого определяется углом φ , а длина $dS = R \cdot d\varphi$. Тогда действующая сила равна: $dQ = q \cdot dS = qRd\varphi$. Проекция этой силы на ось Ox равна:

$$dQ_x = dQ \cdot \cos \varphi = qR(\cos \varphi)d\varphi.$$

Интегрируя, получим

$$Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = qR \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2qR \sin \alpha,$$

где: $R \cdot \sin \alpha = \frac{AB}{2}$. Следовательно, при $O_x = Q$ имеем

$$Q = q \cdot h \quad (3)$$

где: $h = AB$ - хорда.

§ 5. Геометрический способ сложения и разложения сил.

Равнодействующая сходящихся сил

Главный вектор системы сил – есть геометрическая сумма всех сил, входящих в систему.

Понятие геометрической суммы не следует смешивать с понятием о равнодействующей. Многие системы сил вообще могут не иметь равнодействующей.

1. Сложение двух сил

Геометрическая сумма \bar{R} двух сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 находится по правилу параллелограмма или построением силового треугольника (рис. 23). Модуль силы \bar{R} и углы α, β и γ определяются по формулам:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (4)$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

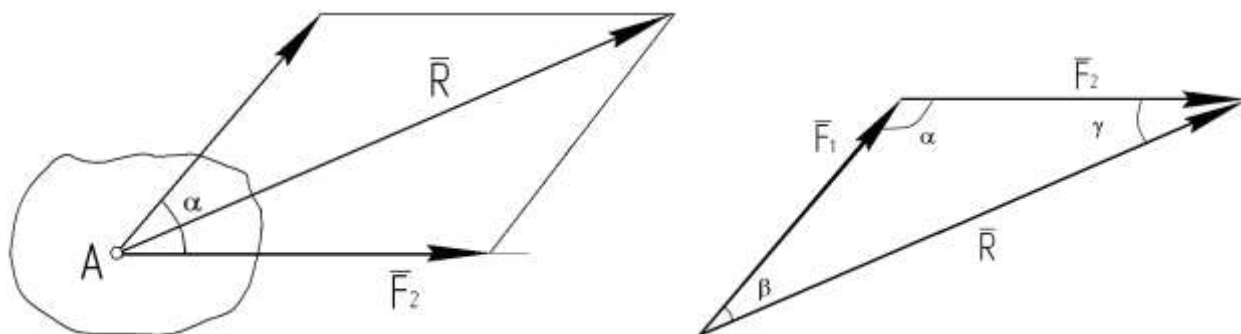


Рис. 23

2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости

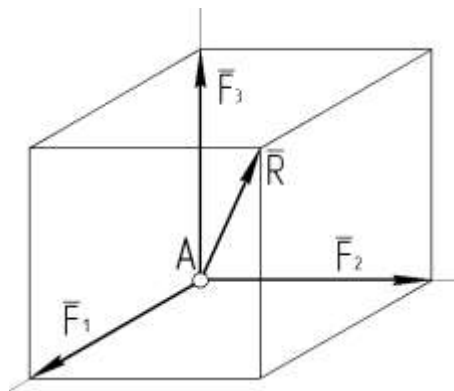


Рис. 24

Геометрическая сумма трех сил, не лежащих в одной плоскости – есть диагональ параллелепипеда, построенного на этих силах, как на сторонах.

3. Сложение системы сил

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется либо последовательным сложением сил по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ при решении задач применяется чаще в силу простоты и удобства. Для этого (рис. 25) откладываем от произвольной точки O (рис. 25, б) вектор \bar{F}_1 в определенном масштабе.

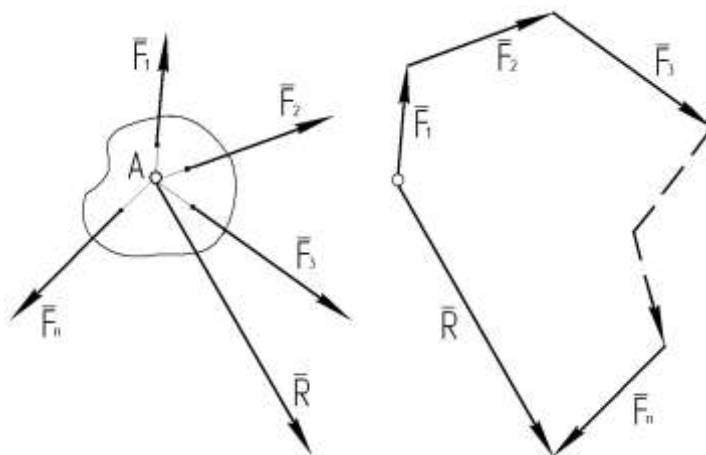


Рис. 25

Затем от конца вектора \bar{F}_1 откладывается в этом же масштабе вектор \bar{F}_2 . Аналогично откладывается вектор \bar{F}_3 и т.д. Последним откладывается \bar{F}_n . Соединив начало первого вектора с концом последнего, получим вектор \bar{R} , изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n \quad \text{или} \quad \bar{R} = \sum \bar{F}_K \quad (6)$$

4. Равнодействующая сходящихся сил

Сходящейся системой сил называется такая система, линии действия которых пересекаются в одной точке. Сила – вектор скользящий. Значит система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (точке *A*) (рис. 25, а).

Поэтому заключаем, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия.

5. Разложение сил

Разложить данную силу на несколько составляющих – значит составить такую систему, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является неопределенной. Рассмотрим разложение по двум и трем направлениям.

а) Разложение силы по двум направлениям. Задача сводится к построению параллелограмма, у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны – параллельны заданным направлениям (рис. 23, а).

б) Разложение силы по трем заданным направлениям. Если силы не лежат в одной плоскости, то задача сводится к построению параллелепипеда, у которого диагональ есть разлагаемая сила, а ребра параллельны заданным направлениям (рис. 24). Способы разложения используются при решении задач для определения сил давления на связи.

§ 6. Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы – величина алгебраическая, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (рис. 26). $F_x = F \cdot \cos \alpha$

Если этот угол острый – проекция положительна (рис. 26); если угол тупой – проекция отрицательна (рис. 27). Если сила перпендикулярна оси – ее проекция на ось равна нулю.

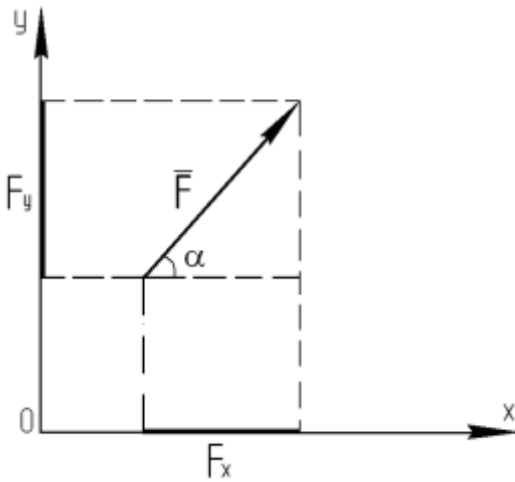


Рис. 26

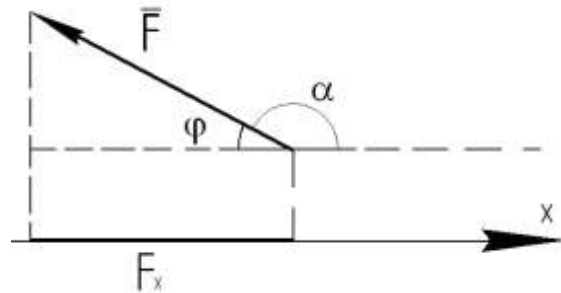


Рис. 27

Проекцией силы \vec{F} на плоскость Oxy называется вектор $\vec{F}_{xy} = \overline{OC}$ (рис. 28).

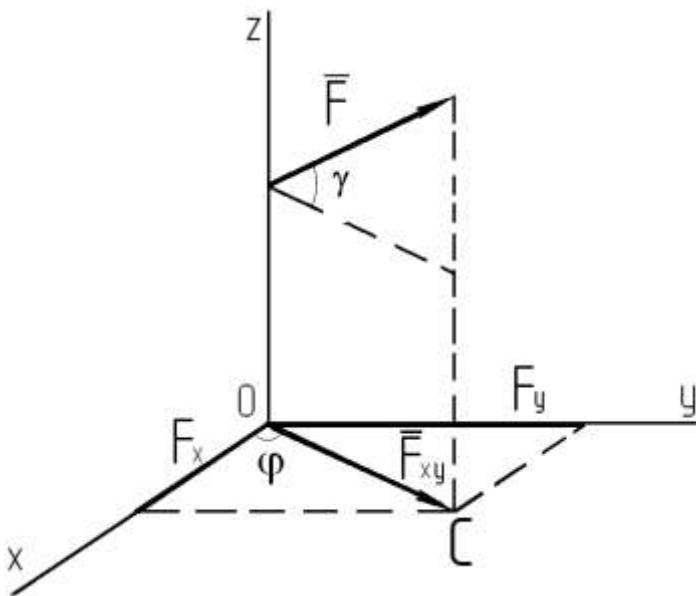


Рис. 28

В отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная. По модулю $F_{xy} = F \cdot \cos \gamma$. Для нахождения проекции силы на ось, удобнее найти ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \gamma \cdot \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \gamma \cdot \sin \varphi \quad (7)$$

§ 7. Аналитический способ задания сил

Для аналитического задания силы необходимо выбрать систему координатных осей $Oxyz$, по отношению к которой будет определяться направление

силы в пространстве. В теоретической механике пользуются правой системой координат, то есть такой системой, в которой кратчайшее совмещение оси Ox с осью Oy происходит, если смотреть с положительного конца оси Oz , против хода часовой стрелки (рис. 29).

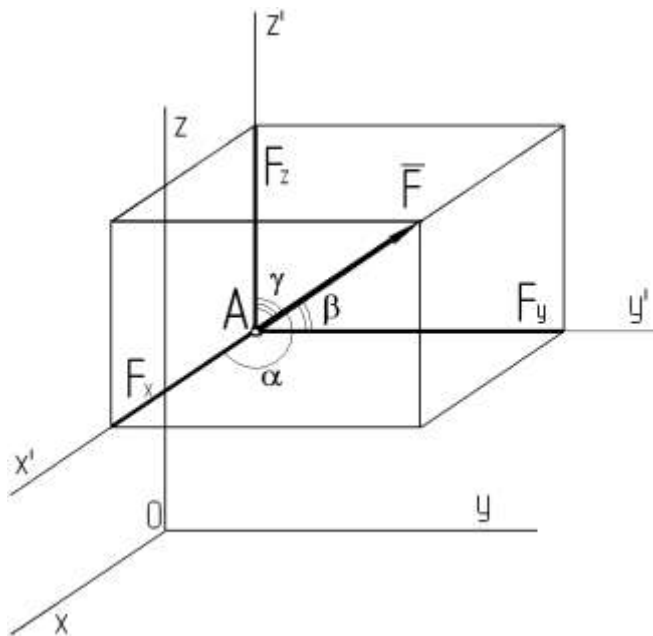


Рис. 29

Вектор \vec{F} можно построить, если известны модуль F этой силы и углы α, β, γ , которые сила образует с координатными осями. Т.е. величины F, α, β, γ и задают силу \vec{F} . Точка A приложения силы должна быть задана отдельно ее координатами X, Y, Z .

А вот при решении задач удобнее задавать силу ее проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси. Зная эти проекции, можно определить модуль силы и углы, которые она образует с координатными осями, по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (8)$$

Если все силы расположены в донной плоскости, то формулы (8) примут вид:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (9)$$

§ 8. Аналитический способ сложения сил

Зависимость между вектором и его проекциями осуществляется с помощью теоремы: проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Т.е. если

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_K, \text{ то } R_x = \sum F_{KX}, \quad R_y = \sum F_{KY}, \quad R_z = \sum F_{KZ} \quad (10)$$

$$\text{Тогда } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (11)$$

Если силы расположены в одной плоскости, то

$$R_x = \sum F_{KX}, \quad R_y = \sum F_{KY}, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}. \quad (12)$$

Задача. Найти сумму трех сил, лежащих в одной плоскости (рис. 30), если дано:

$$F = 4\text{Н}, \quad P = 3\text{Н}, \quad Q = 2\text{Н}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 30^\circ$$

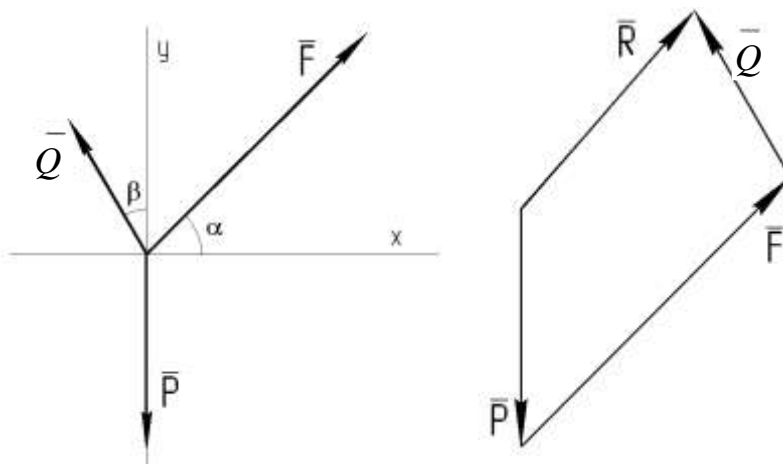


Рис. 30

Решение. Проекции сил на координатные оси будут:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 2,8\text{Н}, \quad Q_x = -Q \cdot \cos 60^\circ = -1\text{Н}, \quad P_x = 0$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 2,8\text{Н}, \quad Q_y = Q \cdot \cos \beta = 1,7\text{Н}, \quad P_y = -P = -3\text{Н}$$

По формулам (10) имеем:

$$P_x = 2,8 - 1 = 1,8\text{Н}, \quad P_y = 2,8 + 1,7 - 3 = 1,5\text{Н}$$

Тогда $R = \sqrt{1,8^2 + 1,5^2} = 2,34 \text{ Н}$; $\cos \varphi = \frac{1,8}{2,34} = 0,7$, $\cos \tau = \frac{1,5}{2,34} = 0,64$.

Окончательно: $R = 2,34 \text{ Н}$, $\varphi = 45,6^\circ$, $\tau = 50,2^\circ$.

Для решения той же задачи геометрическим способом надо построить силовой многоугольник (рис. 30, б) в определенном масштабе (1 см – 1 Н). Длина вектора \bar{R} приблизительно равна 2,4 см. Следовательно $R \approx 2,4 \text{ Н}$, что составляет ошибку около 2,6%.

§ 9. Равновесие системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая (главный вектор) были равны нулю.

1. *Геометрическое условие равновесия.* Главный вектор \bar{R} есть замыкающая сторона силового многоугольника и обращается в нуль тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой силы, т.е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

2. *Аналитическое условие равновесия.* Модуль главного вектора \bar{R} равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

\bar{R} обратится в нуль, если $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$ одновременно, или

$$R_x = \sum F_{KX} = 0, \quad R_y = \sum F_{KY} = 0, \quad R_z = \sum F_{KZ} = 0. \quad (13)$$

Равенство (13) и есть условие равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если сходящаяся система сил плоская, то будет только два условия равновесия.

$$\sum F_{KX} = 0, \quad \sum F_{KY} = 0. \quad (14)$$

§ 10. Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Пусть силы \bar{F} и \bar{P} пересекаются в одной точке (рис. 31).

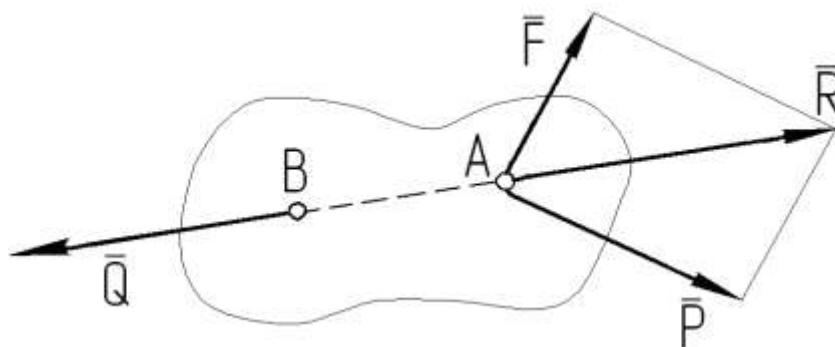


Рис. 31

Заменяем их равнодействующей \bar{R} . Тогда на тело будут действовать две силы \bar{R} и \bar{Q} , приложенная в точке В. Если тело находится в равновесии, то силы \bar{R} и \bar{Q} должны по аксиоме лежать на одной прямой AB и направлены в разные стороны. Тогда линия действия силы \bar{Q} проходит через точку A , что и требовалось доказать.

Обратная теорема места не имеет. Теорема выражает только необходимое условие.

Задача. Горизонтальная балка AB длиной 3 м опирается на неподвижный A и подвижный B шарниры. К середине балки приложена сила $F = 1200$ Н под углом 45° к ней. Определить реакции опор A и B .

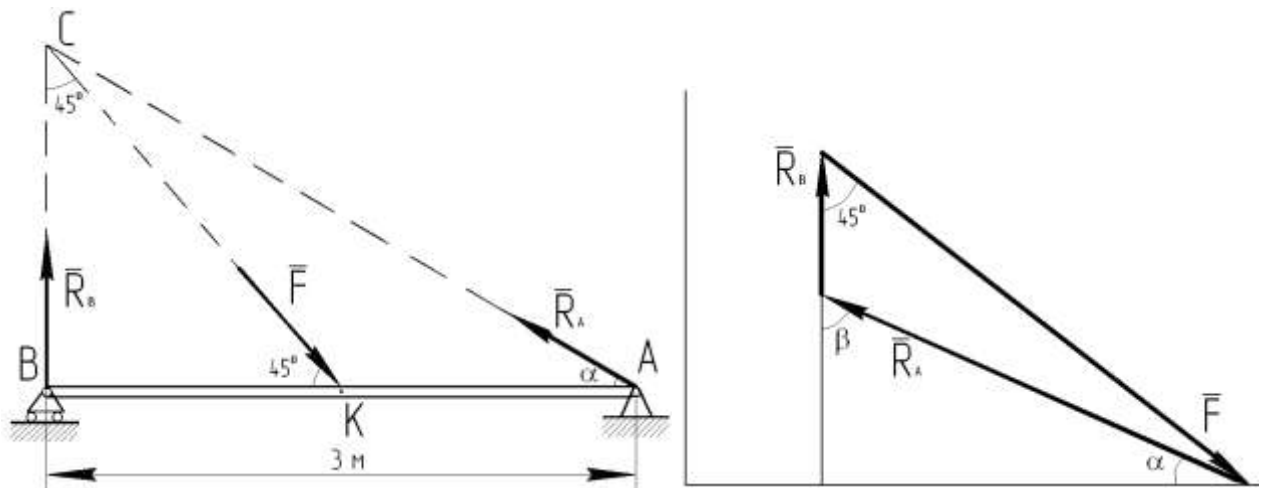


Рис. 32

Решение. Направление реакции \bar{R}_B известно. Проводим линии действия сил \bar{R}_B и \bar{F} до их пересечения в точке C . Очевидно, что через эту точку C должна пройти и линия действия силы \bar{R}_A . Строим замкнутый силовой треугольник в некотором масштабе. По теореме синусов имеем:

$$\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{F}{\sin(180^\circ - \beta)};$$

откуда
$$R_B = \frac{F \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \beta)} = F \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \operatorname{tg} \alpha) = 848,5(1 - \operatorname{tg} \alpha).$$

Из рис. 32,а видно, что $BC = BK = KA = 1,5$ м, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, и тогда

$$R_B = 424,3 \text{ Н}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,5 \approx 26,6^\circ, \quad R_A = \frac{R_B \cdot \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{424,3 \cdot 0,707}{0,3} = 1000 \text{ Н}.$$

Теорема о трех силах позволила в этом случае определить неизвестное направление реакции шарнира A .

Эта задача может быть решена и геометрическим способом. При равновесии (рис. 32, б) треугольник, построенный из сил \bar{F} , \bar{R}_B и \bar{R}_A , должен быть замкнутым. Построение треугольника начинается с заданной силы \bar{F} от произвольной точки в выбранном масштабе. Через начало и конец силы \bar{F} проводим прямые, параллельные направлениям сил \bar{R}_A и \bar{R}_B . Точка пересечения этих прямых дает третью вершину замкнутого силового треугольника, стороны которого равны искомым силам в выбранном масштабе. Направление искомым сил выбирается таким образом, чтобы стрелки не встречались ни в одной точке.

§ 11. Решение задач статики

При решении задач статики, как правило, считается, что силы реакции неизвестны. Определение реакций тела (или тел), находящегося в равновесии сводится к определенной последовательности.

1. *Выбор тела (тел), реакции которого надо определить.*
2. *Изображение на чертеже действующих сил, как заданных, так и сил реакций.*
3. *Выбор системы отсчета (системы координат).*
4. *Составление условий равновесия для различных систем сил.*
5. *Решение уравнений равновесия.*
6. *Определение искомым величин, проверка правильности решения и исследование полученных результатов.*

Для решения задач на равновесие тела под действием сходящихся сил можно пользоваться геометрическим или аналитическим методом. *Геометрическим методом* удобно пользоваться, когда число действующих на тело сил равно трем. Треугольник сил должен быть замкнутым. Решая этот треугольник, находят искомые силы (рис. 32, б). Аналитическим методом пользуются при любом числе приложенных к телу сил.

Задача. Блок A , укрепленный на кронштейне, состоящем из стержней AB и AC , находится в равновесии. Через блок перекинут трос, на котором подвешен груз весом $P = 700$ Н. Определить реакции стержней, пренебрегая их весом, если углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 25^\circ$.

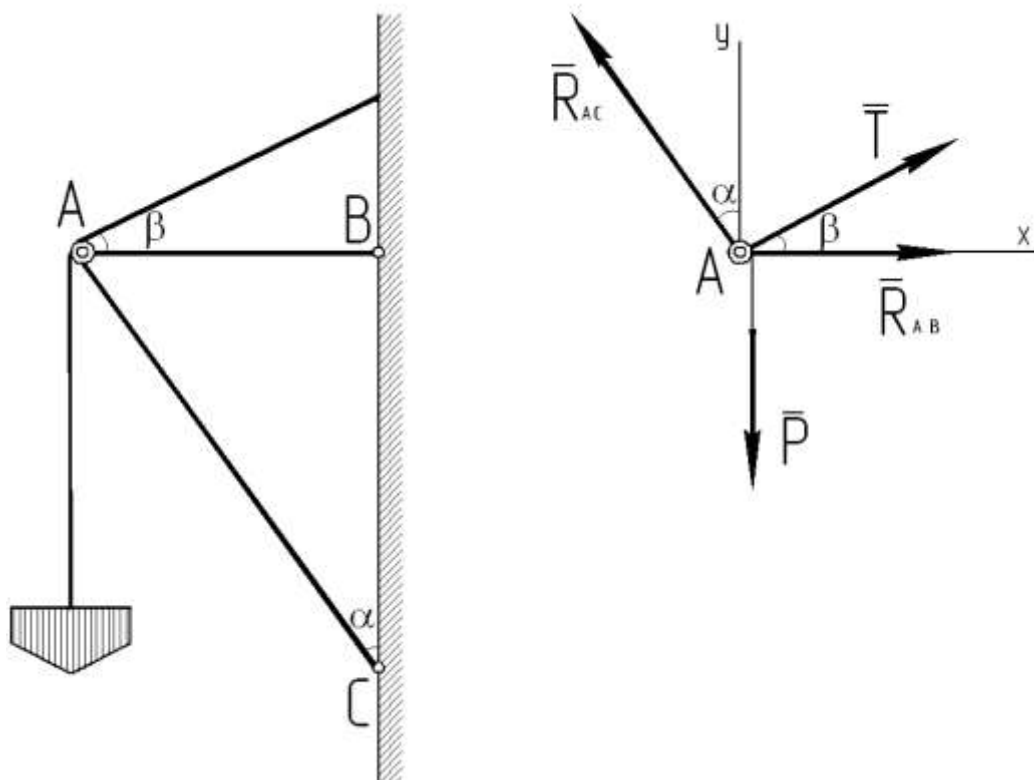


Рис. 33

Решение. Рассмотрим равновесие блока A (рис. 33, б). На блок действуют четыре силы \bar{P} , \bar{T} и реакции стержней \bar{R}_{AB} и \bar{R}_{AC} . Причем по численному значению $P = T$. Силы, пренебрегая размерами блока, считаем сходящимися. Аналитическим условием равновесия будет:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad T \cdot \cos \beta + R_{AB} - R_{AC} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad R_{AC} \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \beta - P = 0.$$

Подставив числовые значения известных величин, получим

$$R_{AC} = 467 \text{ Н}, \quad R_{AB} = -397 \text{ Н}.$$

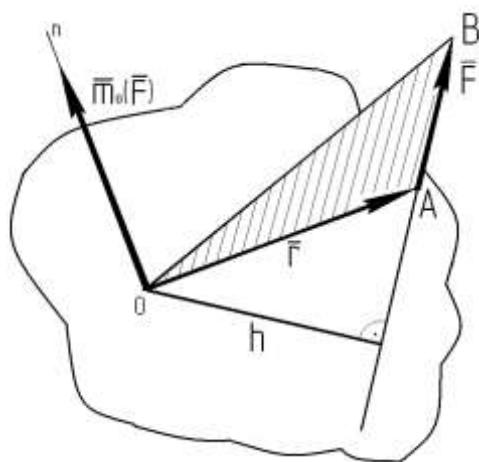
Знак «минус» у реакции R_{AB} означает, что направление этой силы на чертеже противоположно правильному.

Глава III

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. ПАРА СИЛ

§ 12. Момент силы относительно центра (точки)

Если под действием приложенной силы тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент силы характеризует вращательный эффект силы. Рассмотрим силу \vec{F} , приложенную в точке A (рис. 34).



Из некоторой точки O опустим перпендикуляр на линию действия силы \vec{F} . Длина этого перпендикуляра h называется плечом силы \vec{F} относительно центра O . Момент силы относительно центра O определяется:

- 1) модулем момента, равным произведению $F \cdot h$;
- 2) положением в пространстве плоскости OAB , проходящей через центр O и силу \vec{F} ;
- 3) направлением поворота в этой плоскости.

Рис. 34

Известно, что положение плоскости в пространстве определяется направлением нормали. Значит момент силы характеризуется не только числовым значением, но и направлением в пространстве, т.е. является величиной векторной.

Таким образом, момент силы \vec{F} относительно центра O называется приложенный в точке O вектор $\vec{m}_o(\vec{F})$, модуль которого равен $F \cdot h$ и который направлен перпендикулярно плоскости в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (рис. 34). И тогда

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = h \cdot F = 2 \text{ пл. } \Delta OAB \quad (15)$$

Единицей измерения момента силы является ньютон-метр (Н·м).

Из векторной алгебры очевидно, что вектора $\overline{OA} \times \overline{F}$ и $\overline{m}_o(\overline{F})$ совпадают и по модулю, и по направлению, и по размерности. Значит

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}, \quad (16)$$

где: $\overline{r} = \overline{OA}$ - радиус – вектор точки A .

Векторное уравнение (16) тоже дает понятие о моменте силы относительно центра.

Свойства момента силы:

- 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;
- 2) момент силы относительно центра равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

§ 13. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 35).

$$\overline{F} = -\overline{F}'$$

Плоскость, в которой лежат силы, называют плоскостью ее действия. Пара сил стремится повернуть тело, т.е. придать ему вращательное движение. Система сил \overline{F} и \overline{F}' не находятся в равновесии, т.к. не направлены вдоль одной прямой.

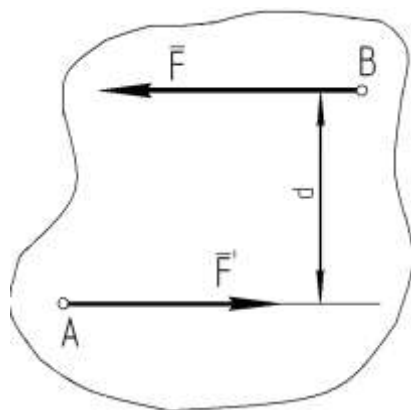


Рис. 35

Расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары*.

Вращательный эффект пары характеризуется величиной, называемой *моментом пары*. Этот момент определяется:

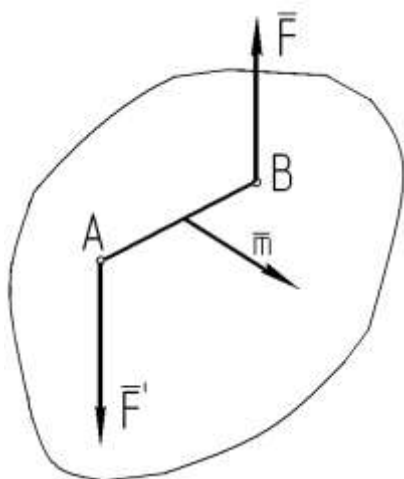
- 1) модулем, равным $F \cdot d$;
- 2) положением в пространстве плоскости действия пары;
- 3) направлением поворота пары в этой плоскости.

Таким образом, как и момент силы относительно центра, это величина векторная.

Моментом пары сил называется вектор \vec{m} , модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки (рис. 36).

Модуль момента пары равен:

$$m = F \cdot d \quad (17)$$



Легко доказать, что $\vec{m} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{m}_A(\vec{F})$ или $\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F})$, т.е. момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.

Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны, т.е. оказывают на тело одинаковое механическое действие.

Рис. 36

Это означает, что две пары сил, независимо от того, где каждая из них расположена в данной плоскости или в параллельных плоскостях и чему равны в отдельности модули их сил и их плечи, если их моменты имеют одно и то же значение \vec{m} , будут эквивалентны, т.е. вектор \vec{m} можно считать приложенным в любой точке – это вектор свободный. Часто при решении задач вместо пары изображают вектор \vec{m} , а направление \vec{m} определяется плоскостью действия пары и направлением поворота в этой плоскости.

Если на тело действует несколько пар с моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то совокупность всех пар эквивалента одной паре с моментом $\bar{M} = \sum \bar{m}_k$. Этот результат выражает теорему о сложении пар.

§ 14. Теоремы об эквивалентности и о сложении пар

Рассмотрим пару сил \bar{F} и \bar{F}' и проведем две параллельные прямые до пересечения с линиями действия сил в точках А и В (рис. 37) и приложим силы \bar{F} и \bar{F}' в этих точках. Разложим силу \bar{F} на \bar{Q} и \bar{P} , а силу \bar{F}' - на \bar{Q}' и \bar{P}' . Очевидно, что $\bar{P}' = -\bar{P}$, $\bar{Q}' = -\bar{Q}$.

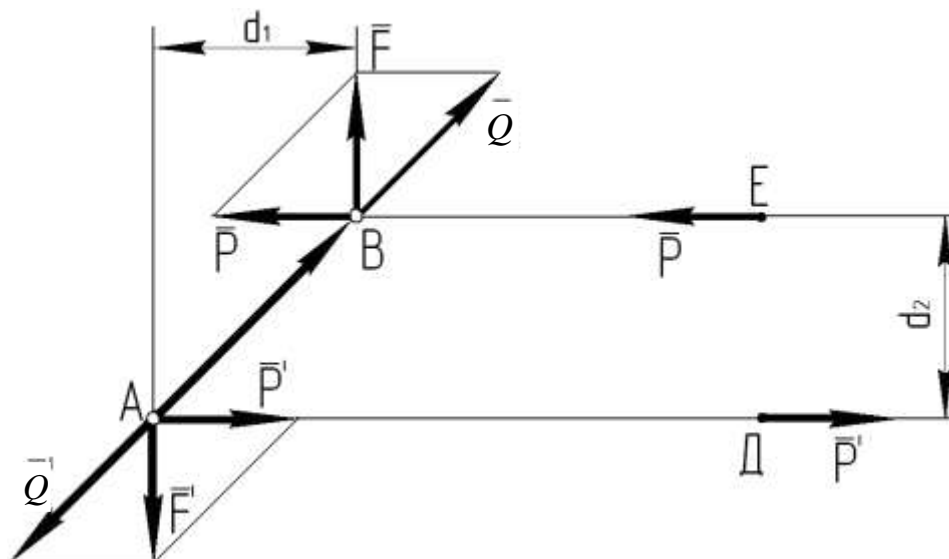


Рис. 37

Отбросим силы \bar{Q} и \bar{Q}' как уравновешенные. В результате пара сил \bar{F} , \bar{F}' будет заменена парой \bar{P} , \bar{P}' с другим плечом и другими силами, которые можно приложить в точках D и E на их линии действия. Пара \bar{P} , \bar{P}' может оказаться в плоскости где угодно. Моменты пар сил \bar{F} , \bar{F}' и \bar{P} , \bar{P}' будут одинаковы, т.к. если обозначить $\bar{m}_1 = \bar{AB} \times \bar{F}$, а $\bar{m}_2 = \bar{AB} \times \bar{P}$. Очевидно, что $\bar{F} = \bar{P} + \bar{Q}$, тогда $\bar{AB} \times \bar{F} = \bar{AB} \times \bar{P} + \bar{AB} \times \bar{Q}$, но $\bar{AB} \times \bar{P} = 0$, следовательно, $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$.

Из доказанного вытекают свойства пары сил:

1) пару, не изменяя действия на тело, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;

2) у данной пары, не изменяя действия на твердое тело, можно произвольно менять модули сил и длину плеча, сохраняя неизменным ее момент;

3) данную пару, не изменяя ее действия на тело можно переносить в любую другую плоскость, параллельную данной.

Две пары, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу.

Теорема о сложении пар: система пар, действующих на твердое тело, эквивалента одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

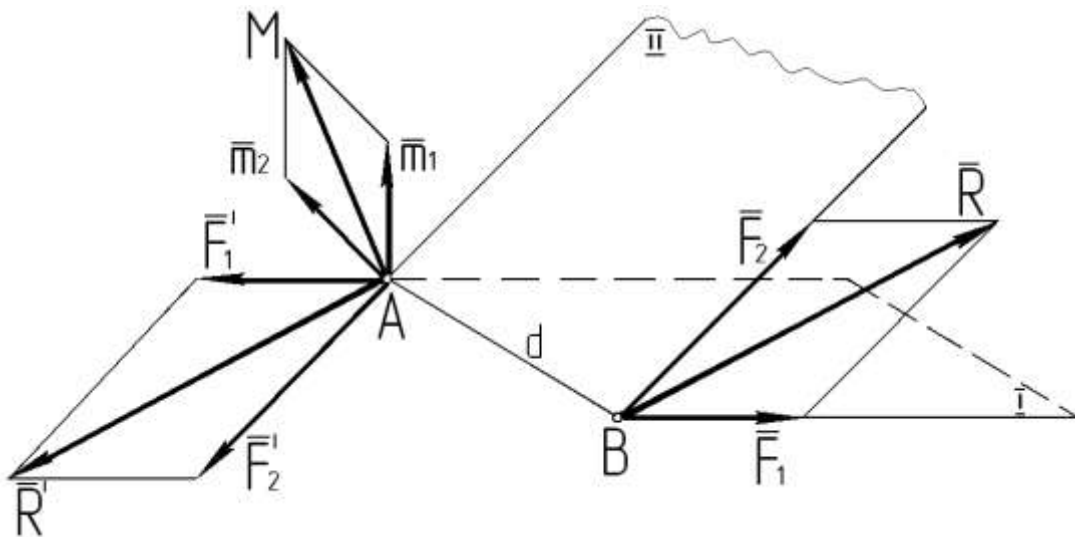


Рис. 38

Докажем теорему для двух пар с моментами \bar{m}_1 и \bar{m}_2 (рис. 38). Пары \bar{F}_1 , \bar{F}_1' и \bar{F}_2 , \bar{F}_2' лежат в плоскостях I и II. На линии пересечения плоскостей $AB=d$, изобразим пару с моментом $\bar{m}_1(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$ и пару \bar{F}_2, \bar{F}_2' с моментом \bar{m}_2 . При этом

$$F_1 \cdot d = m_1, \quad F_2 \cdot d = m_2$$

Сложив силы, приложенные в точках A и B , видим, что пары \bar{F}_1, \bar{F}_1' и \bar{F}_2, \bar{F}_2' эквивалентны одной паре \bar{R}, \bar{R}' . Найдем момент M этой пары. Так как $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, то $\bar{A}\bar{B} \times \bar{R} = \bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_1 + \bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_2$ или $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$, ч.т.д. Если на тело действует система n пар с моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum \bar{m}_k. \quad (18)$$

Очевидно, что условием равновесия системы пар, действующих на твердое тело при его равновесии должно быть:

$$\bar{M} = 0 \text{ или } \sum \bar{m}_k = 0. \quad (19)$$

Задача. На твердое тело действуют две пары сил \bar{F}_1, \bar{F}_1' и \bar{F}_2, \bar{F}_2' , лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 39). Модуль момента пары \bar{F}_1, \bar{F}_1' равен 10 Н·м, а модуль момента пары \bar{F}_2, \bar{F}_2' равен 20 Н·м. Найти результирующую пару.

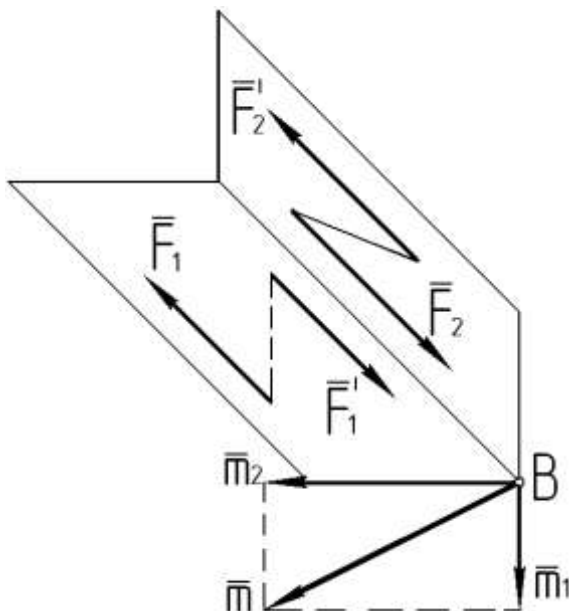


Рис. 39

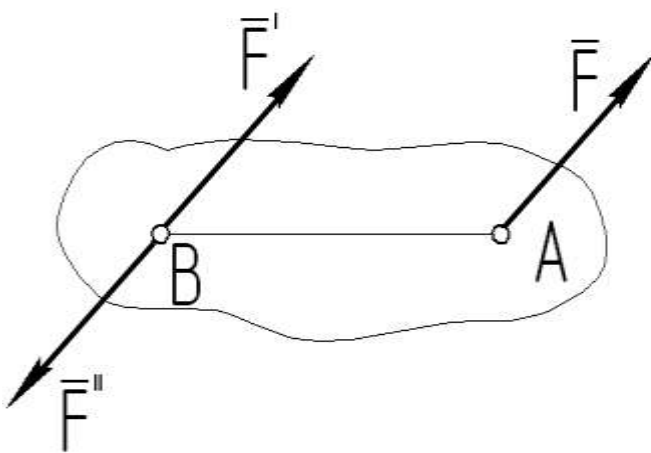
Решение. Изобразим векторы \bar{m}_1 и \bar{m}_2 моментов, приложив их в точке B . Момент результирующей пары изобразится вектором \bar{m} и модуль момента \bar{m} будет равен $m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = 22,36 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 15. Теорема о параллельном переносе силы (Лемма Пуансо)

Не только для сходящейся системы сил, но и для произвольной можно переносить силы в одну точку, если пользоваться теоремой: силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя действия на тело, перенести из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки.

а)



б)

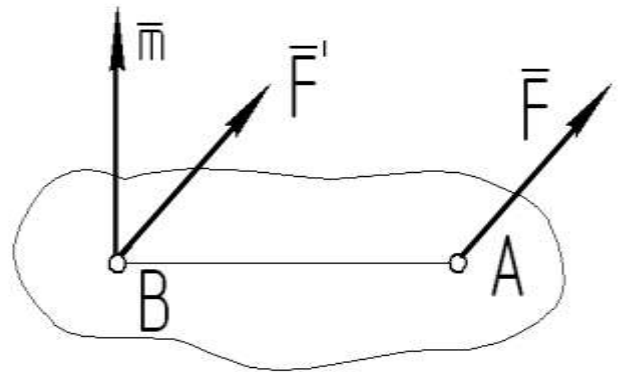


Рис. 40

Пусть на твердое тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A (рис. 40). Действие этой силы на тело не изменится, если в любой точке B тела приложить две уравновешенные силы \vec{F}' и \vec{F}'' , такие, что $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{F}'' = -\vec{F}$. Полученная система трех сил и представляет собой силу \vec{F}' , равную \vec{F} , но приложенную в точке B , и пару \vec{F} , \vec{F}'' с моментом

$$\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}). \quad (20)$$

Таким образом теорема доказана. Результат, даваемый теоремой, можно изобразить рис. 40, б.

Пример.

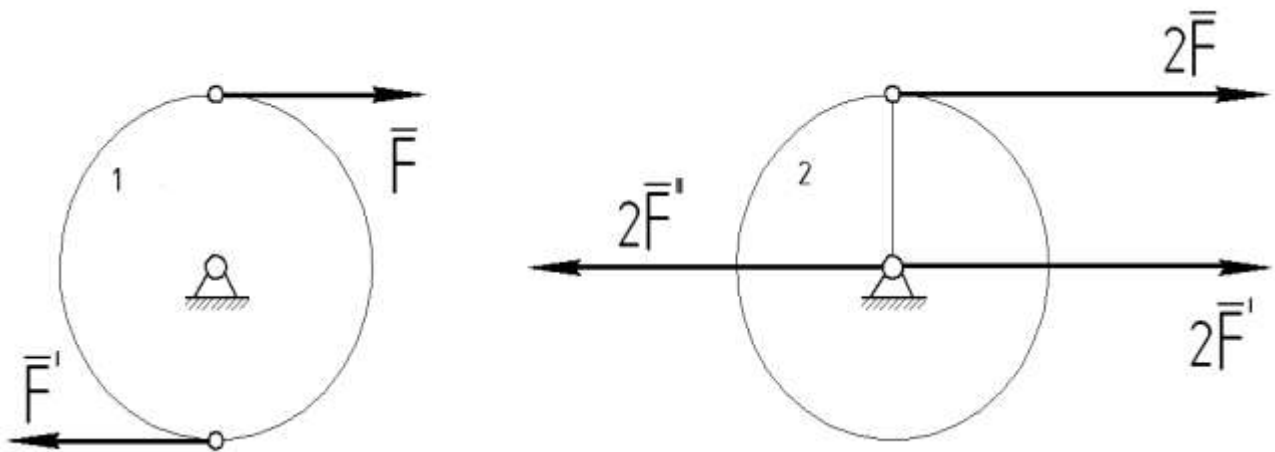


Рис. 41

На барабан 1 действуют две силы \bar{F} и \bar{F}' (рис. 41). На барабан 2 такого же радиуса действует одна сила, равная $2\bar{F}$. Будет ли отличаться действие этих сил?

На барабан 1 действует пара сил \bar{F} , \bar{F}' с моментом численно равным $2F_r$. Силу, действующую на барабан 2, можно заменить силой $2\bar{F}' = 2\bar{F}$, приложенной к оси барабана, и парой $2\bar{F}$, $2\bar{F}''$ с моментом $2F_r$. Но сила $2\bar{F}'$ оказывает давление на ось барабана.

Оба барабана будут вращаться одинаково. Но ось второго барабана испытывает давление, равное $2F$, а ось первого барабана никакого давления не испытывает.

§ 16. Приведение системы сил к данному центру

Это задача о приведении произвольной системы сил к одной силе и одной паре относительно данного центра.

Пусть произвольная система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 42, а) действует на твердое тело.

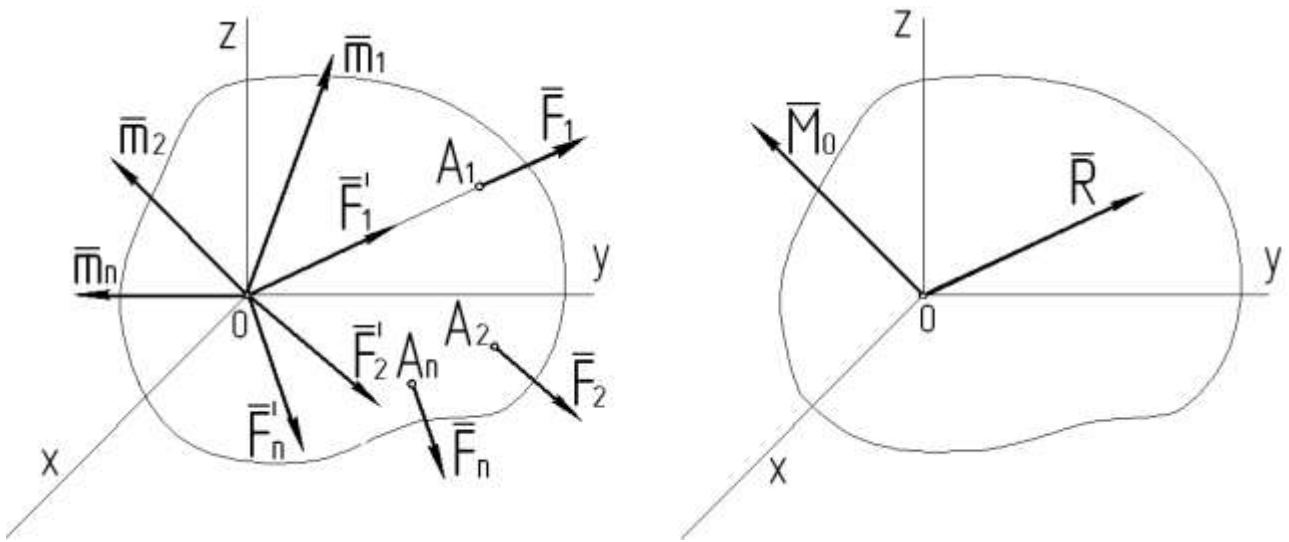


Рис. 42

Выберем точку O за центр приведения и, пользуясь теоремой, доказанной в §15, перенесем все силы в точку O , присоединяя при этом соответствующие пары.

Тогда на тело будут действовать система сил

$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \quad \bar{F}'_2 = \bar{F}_2, \quad \dots, \quad \bar{F}'_n = \bar{F}_n, \quad (21)$$

приложенных в центре O , и система пар, моменты которых согласно формуле (20) равны:

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1), \quad \bar{m}_2 = \bar{m}_0(\bar{F}_2), \quad \dots, \quad \bar{m}_n = \bar{m}_0(\bar{F}_n). \quad (22)$$

Сходящиеся в точке O силы заменяются одной силой \bar{R} , приложенной в точке O . При этом $\bar{R} = \sum \bar{F}'_k$ или согласно (21),

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (23)$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо сложить векторы моментов этих пар. В результате получим

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k). \quad (24)$$

Вектор \bar{R} , равный геометрической сумме всех сил, называется главным вектором системы сил; вектор \bar{M}_0 , равный геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O , называется главным моментом системы сил относительно этого центра.

Таким образом доказана теорема: произвольная система сил, приложенная к твердому телу, при приведении к произвольному центру O можно заменить одной силой \bar{R} , равной главному вектору системы сил и одной парой с моментом \bar{M}_0 , равным главному моменту системы сил относительно центра O (рис. 42, б).

Надо отметить, что сила \bar{R} не является здесь равнодействующей и значение этой силы от выбора центра не зависит. А вот значение \bar{M}_0 от выбора центра может изменяться. Поэтому всегда необходимо указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Из теоремы следует, что две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны.

Рассмотрим два случая:

1) если $\bar{R} = 0$, а $\bar{M}_0 \neq 0$, то данная система сил приводится к одной паре с моментом \bar{M}_0 и значение \bar{M}_0 не зависит от выбора центра;

2) $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_0 = 0$, то система сил приводится к одной силе равной \bar{R} и приложенной в центре O .

§ 17. Условие равновесия системы сил

Теорема о моменте равнодействующей

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент относительно любого центра были равны нулю

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_0 = 0. \quad (25)$$

Условие (25) является необходимым и достаточным. Используя полученный результат докажем теорему Вариньона (1654-1722 гг.) о моменте равнодействующей: момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Пусть система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ приводится к равнодействующей \bar{R} , линия действия которой проходит через некоторую точку C (рис. 43). Приложим в этой точке силу $\bar{R}' = -\bar{R}$. Тогда система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$ будет находиться в равновесии и для нее должно выполняться условие $\bar{M}_0 = 0$ или $\sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \bar{m}_0(\bar{R}') = 0$. Но так как $\bar{R}' = -\bar{R}$ и обе силы направлены вдоль одной прямой, то $\bar{m}_0(\bar{R}') = -\bar{m}_0(\bar{R})$.

Подставив это значение в предыдущее равенство, получим

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k). \quad (26)$$

Что и требовалось доказать. Этой теоремой удобно пользоваться при вычислении моментов сил.

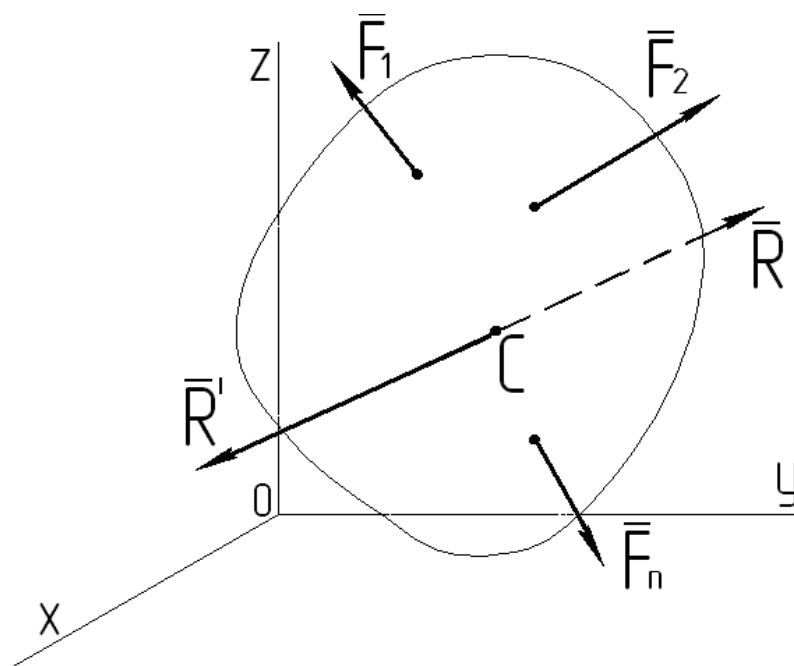


Рис. 43

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 18. Алгебраические моменты силы и пары

Если силы лежат в одной плоскости, то их моменты относительно любого центра O , лежащего в этой плоскости, перпендикулярны этой плоскости и их моменты можно отличать знаком и рассматривать как алгебраические величины. Момент силы \vec{F} в дальнейшем будем обозначать символом $m_0(\vec{F})$. Алгебраический момент силы \vec{F} относительно центра O равен произведению модуля силы на ее плечо, т.е.

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (27)$$

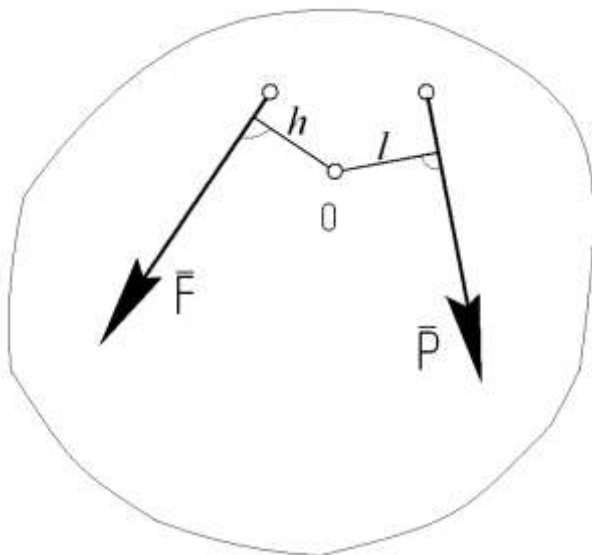


Рис. 44

В правой системе координат момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки. Так для силы \vec{F} и \vec{P} (рис. 44) имеем $m_0(\vec{F}) = F \cdot h$, $m_0(\vec{P}) = -P \cdot l$.

Рассмотрим теперь момент пары сил. Поскольку момент пары сил равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы, то для пар, лежащих в одной плоскости, момент пары рассматривают тоже как алгебраическую величину и обозначают символом m или M .

Алгебраический момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:

$$m = \pm F \cdot d \quad (28)$$

Правило знаков здесь такое же, как и для момента силы (рис. 45):

$$m_1 = F \cdot l, \quad m_2 = -P \cdot d$$

Так как пара сил характеризуется только ее моментом, то на рисунках пару часто изображают просто дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары.

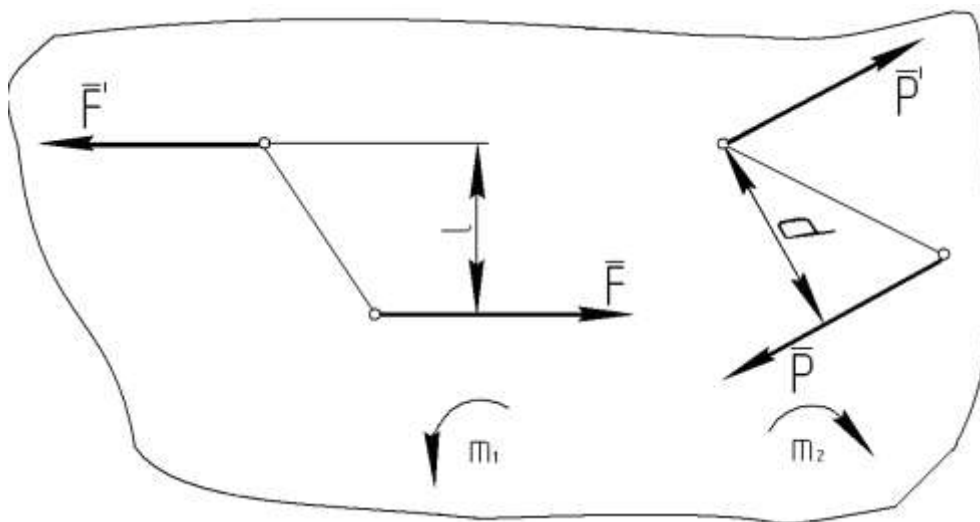


Рис. 45

§ 19. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Произвольная плоская система сил, как и пространственная тоже приводится к силе \bar{R} , приложенной в произвольно выбранном центре O , и паре с моментом M_0 , но сила и пара лежат в данном случае в одной плоскости – в плоскости действия сил (рис. 46).

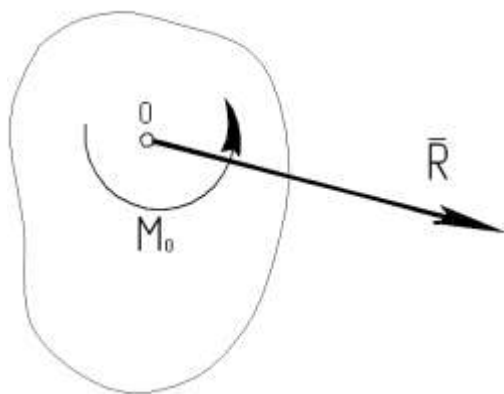


Рис. 46

Значение главного вектора \bar{R} и главного момента M_0 даются формулами:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k, \quad \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k).$$

Вектор \bar{R} можно определить геометрически построением силового многоугольника или аналитически по формулам

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Таким образом, для плоской системы сил

$$R_x = \sum F_{KX}, \quad R_y = \sum F_{KY}, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (29)$$

где все моменты в последнем равенстве алгебраические.

Рассмотрим случай, когда плоская система сил не находится в равновесии. Результат зависит от значений \bar{R} и M_0 .

1. Если $\bar{R} = 0$, а $\bar{M}_0 \neq 0$, то она приводится к одной паре с моментом M_0 , значение которого не зависит от выбора центра O .

2. Если $\bar{R} \neq 0$, то система приводится к одной силе, т.е. к равнодействующей. При этом возможны два случая:

а) $\bar{R} \neq 0$, $M_0 = 0$. В этом случае система приводится к равнодействующей, проходящей через центр O ;

б) $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$. В этом случае пару с моментом M_0 можно изобразить двумя силами \bar{R}' и \bar{R}'' , беря $\bar{R}' = \bar{R}$, а $\bar{R}'' = -\bar{R}$ (рис. 47).

Если $d = OC$ плечо пары, то должно быть

$$Rd = |M_0|. \quad (30)$$

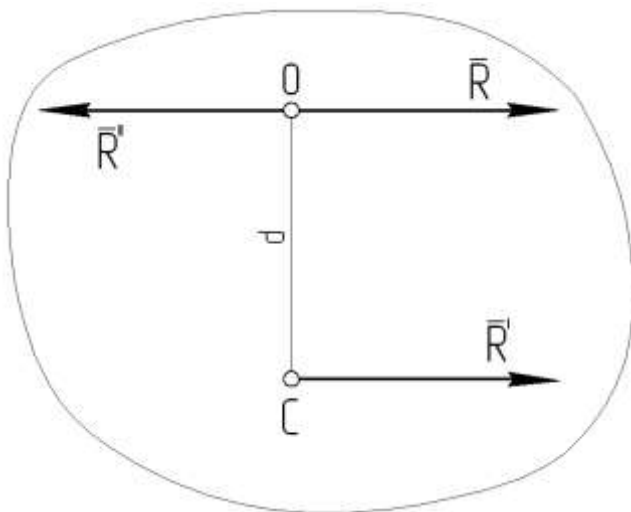


Рис. 47

Отбросив теперь силы \bar{R} и \bar{R}'' , как уравновешенные, получаем, что вся система сил заменяется равнодействующей $\bar{R}' = \bar{R}$, проходящей через точку C .

Таким образом, плоская система сил, не находящаяся в равновесии, может быть окончательно приведена или к одной силе или к паре сил, когда $\bar{R} = 0$.

§ 20. Равновесие плоской системы сил

Для любой системы сил необходимым и достаточным условием равновесия является: $\bar{R} = 0$ и $M_0 = 0$. Найдем аналитические условия равновесия плоской системы сил.

1. Основная форма условий равновесия.

Так как для равновесия должно выполняться $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$, то для плоской произвольной системы сил должно $R_x = 0$, $R_y = 0$ и $M_0 = 0$ или

$$\sum F_{KX} = 0, \quad \sum F_{KY} = 0, \quad \sum m_0(\bar{F}_K) = 0. \quad (31)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2. Вторая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно любых двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю:

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum F_{KX} = 0. \quad (32)$$

3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A , B и C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_C(\bar{F}_K) = 0. \quad (33)$$

Итак, получено три условия равновесия. Условие (31) считается основным, так как здесь нет никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов.

§ 21. Равновесие плоской системы параллельных сил

Если все действующие на тело силы параллельны, то ось Ox можно направить перпендикулярно силам, а ось Oy параллельно им (рис. 48). Тогда проекции сил на ось Ox равны нулю и первое уравнение системы (31) обратится в тождество $0 \equiv 0$. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия:

$$\sum F_{Ky} = 0, \quad \sum m_0(\bar{F}_K) = 0, \quad (34)$$

где ось Oy параллельна силам.

Другая форма условий равновесия для параллельных сил получается из равенства (32) и имеет вид:

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_K) = 0. \quad (35)$$

При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельно силам.

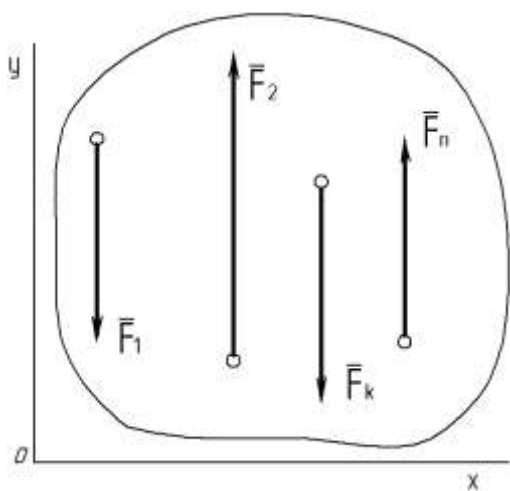


Рис. 48

§ 22. Решение задач

При решении задач необходимо следовать последовательности, указанной в § 11.

Для упрощения составления уравнений и для получения более простых уравнений желательно:

- пользоваться теоремой Вариньона;
- координатную ось проводить перпендикулярно какой-либо неизвестной силе;
- составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекаются больше неизвестных сил.

Задача 1. Жесткий угольник закреплен в точке A шарнирно, а в точке B прикреплен к невесомому стержню с шарнирами на концах (рис. 49, а). На угольник действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 6 \frac{kH}{M}$ и пара сил с моментом $M = 10$ кН·м, а также сила $\bar{F} = 4$ кН, приложенная в точке C . Определить реакции связей в точках A и B , вызываемые действующими нагрузками.

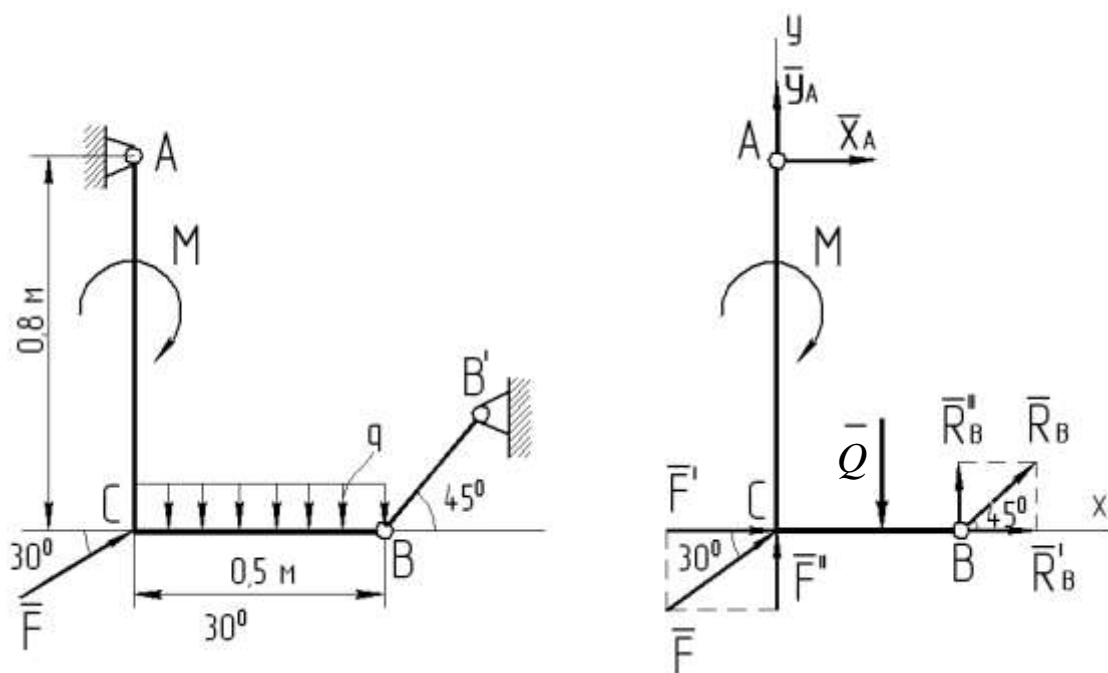


Рис. 49

Решение. 1. Рассмотрим равновесие угольника.

Поведем координатные оси XU и изобразим действующие на угольник силы: силу \bar{F} , пару сил с моментом M , силу \bar{Q} , заменяющую равномерно распределенную нагрузку и реакции связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A и \bar{R}_B .

Для упрощения решения задачи силу \bar{F} заменяем двумя составляющими \bar{F}' и \bar{F}'' :

$$F' = F \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \text{ кН}, \quad F'' = F \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН},$$

Сила \bar{Q} равна: $Q = q \cdot l = 6 \cdot 0,5 = 3$ кН. Реакцию \bar{R} разложим на составляющие \bar{R}' и \bar{R}'' , причем $R'_B = R''_B = R \cdot \cos 45^\circ = 0,707 R$, зная, что реакция \bar{R} направлена вдоль невесомого стержня BB' .

2. Для полученной произвольной плоской системы составляем три уравнения равновесия, а для составления уравнения моментов воспользуемся теоремой Вариньона. Получим:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A + F' + R'_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A + F'' - Q + R''_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad F' \cdot 0,8 + R'_B \cdot 0,8 - M - Q \cdot 0,25 + R''_B \cdot 0,5 = 0. \quad (3)$$

Подставив в уравнении 1-3 заданные значения величин и решив их, найдем искомые реакции:

$$X_A = -9,6 \text{ кН}, \quad Y_A = -5,2 \text{ кН}, \quad R_B = 8,7 \text{ кН}.$$

Знаки показывают, что силы \bar{X}_A и \bar{Y}_A направлены противоположно показанным на рис. 49, б.

Задача 2. Однородный брус AB весом 2 кН жестко заделан в стену под прямым углом. Выступающая из стены часть бруса имеет длину 1 м. К концу бруса приложена сила $F = 4$ кН и пара сил с моментом $M = 3$ кН·м. Определить реакции заделки бруса (рис. 50).

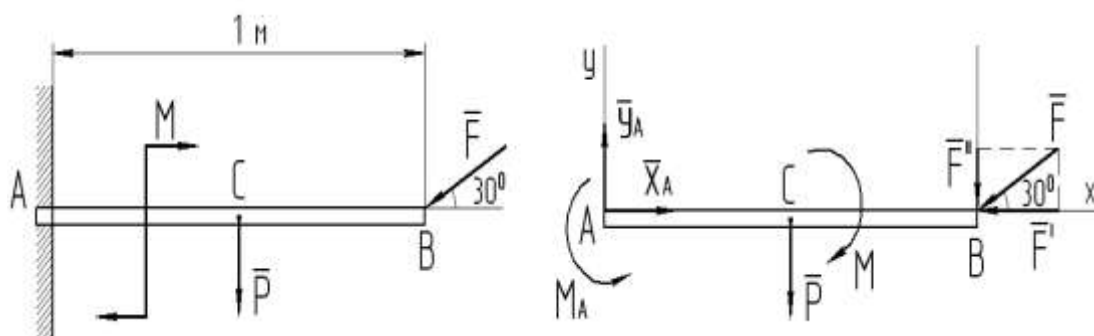


Рис. 50

Решение. Рассмотрим равновесие балки. На балку действуют заданные силы \bar{P} и \bar{F} , а также пара сил с моментом M и реакции связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A и M_A . Для удобства решения задачи разложим силу \bar{F} на две составляющие \bar{F}' и \bar{F}'' , которые будут равны:

$$F' = F \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \text{ кН}, \quad F'' = F \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН}$$

Воспользуемся условиями равновесия для произвольной плоской системы сил

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A - F' = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A - P - F'' = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad M_A - M - P \cdot 0,5 - F'' \cdot 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$X_A = 3,46 \text{ кН}, \quad Y_A = 4 \text{ кН}, \quad M_A = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

§ 23. Равновесие систем тел

Часто в инженерных конструкциях встречается не одно тело, а несколько, соединенных какими-либо связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются *внутренними*. Внешние связи соединяют конструкцию с телами, в нее не входящими (например, с опорами). Так трех шарнирная арка имеет внутреннюю связь C и внешние связи A и B (рис. 51).

Система сил, действующая на такую конструкцию, должна удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Эти условия будут необходимыми, но не достаточными; поэтому из них нельзя определить все неизвестные величины. Для решения задачи необходимо рассмотреть дополнительно равновесие еще какой-нибудь части конструкции.

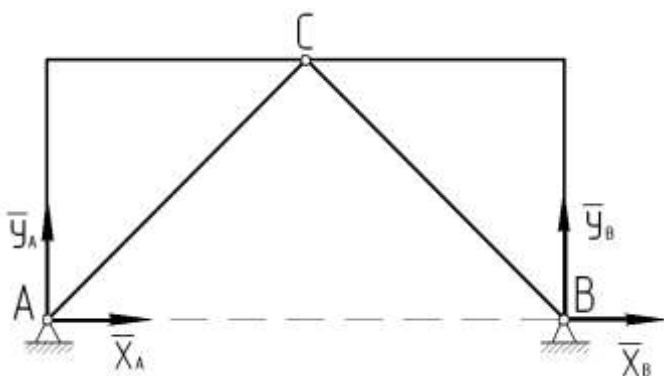


Рис. 51

Другой способ решения задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел в отдельности.

Задача.

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, который шарнирно соединен в точке C с угольником, а другим концом свободно опирается на горизонтальную плоскость. На конструкцию действует пара сил с моментом $M = 40$ кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ и сила $F = 15$ кН, приложенная к середине стержня под прямым углом. Определить реакции в точках A, B, C . Размеры конструкции указаны на чертеже (рис. 52).

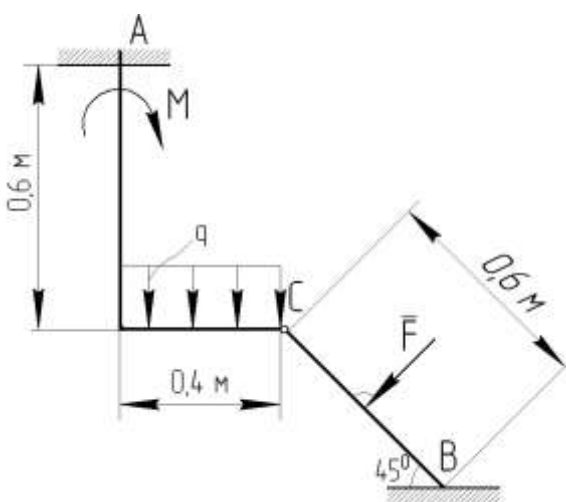


Рис. 52 а

Решение.

1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие угольника (рис. 52, б). Проведем координатные оси XU и изобразим действующие на угольник силы: $Q = q \cdot l = 20 \cdot 0,4 = 8$ кН, пара сил с моментом M и составляющие реакций $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ и пара сил с моментом M_A .

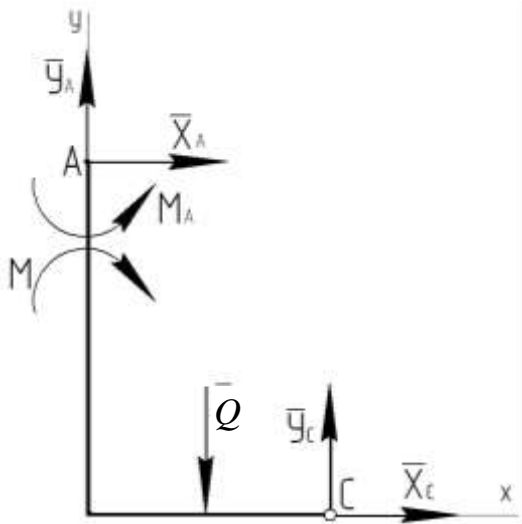


Рис. 52 б

Для полученной произвольной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A + X_C = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A + Y_C - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0,$$

$$M_A - M + Y_C \cdot 0,4 + X_C \cdot 0,6 - Q \cdot 0,2 = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие стержня СВ (рис. 52, в). На него действует заданная сил \bar{F} и реакции \bar{R}_B , \bar{X}'_C и \bar{Y}'_C . Силы реакции \bar{X}'_C и \bar{Y}'_C направлены противоположно реакциям \bar{X}_C и \bar{Y}_C . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad F \cdot \cos 45^\circ - X_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad R_B - F \cdot \sin 45^\circ - Y'_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0, \quad R_B \cdot \cos 45^\circ \cdot 0,6 - F \cdot 0,3 = 0. \quad (6)$$

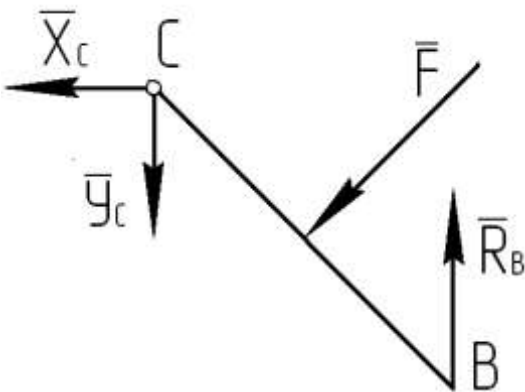


Рис. 52 в

При вычислении неизвестных реакций надо иметь ввиду, что $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ по модулю. Решая систему шести уравнений с шестью неизвестными получим:
 $X_A = 10,5$ кН, $Y_A = 8,2$ кН, $X_C = -10,5$ кН,
 $Y_C = -0,2$ кН, $R_B = 10,7$ кН,
 $M_A = 48,7$ кН·м.

§ 24. Расчет плоских ферм

Фермой называется жесткая плоская или пространственная конструкция, соединенная прямолинейными стержнями с шарнирами на концах. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все силы прикладывают только в узлах фермы. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают. Только при этих условиях на каждый из стержней будут действовать две силы, приложенные к концам и направлены вдоль стержня. Следовательно, стержни фермы работают на растяжение или сжатие. В плоских фермах без лишних стержней выполняется условие:

$$k = 2n - 3, \quad (36)$$

где: k - число стержней;

n - число узлов.

Ферма составлена из треугольников, которые образованы тремя стержнями (рис. 53).

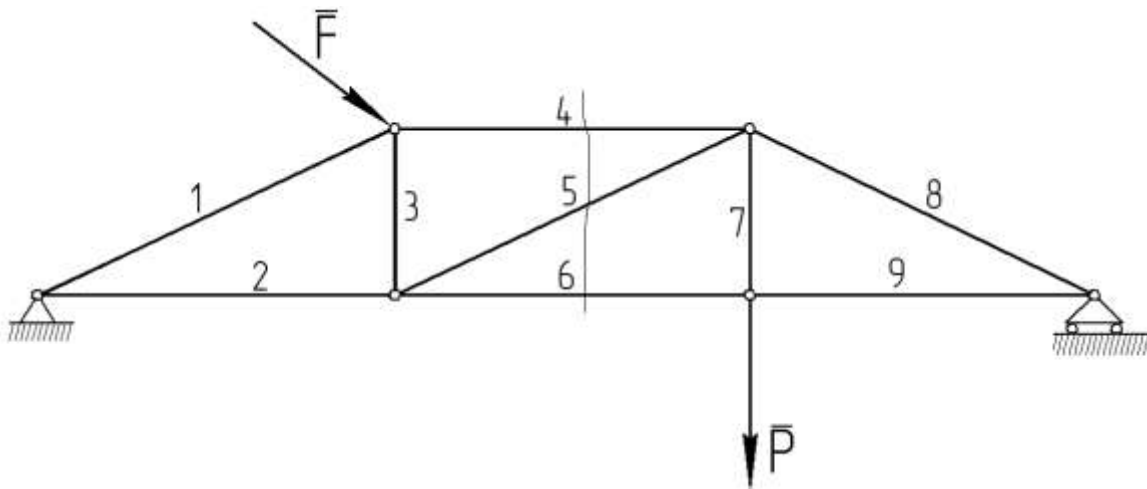


Рис. 53

Присоединения каждого следующего узла требует два стержня. Следовательно, для всех остальных $(n-3)$ узлов требуется $2 \cdot (n-3)$ стержней. Тогда число стержней в ферме $k = 3 + 2 \cdot (n-3) = 2n - 3$. При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Опорные реакции можно найти обычными способами, считая ферму твердым телом.

Рассмотрим расчет усилий в стержнях для плоских ферм двумя методами.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящимся в каждом узле. Ход решения поясним на конкретном примере.

Задача. Определить усилия в стержнях фермы (рис. 54), если действующие силы равны $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 6$ кН. Размеры стержней и углы указаны на чертеже.

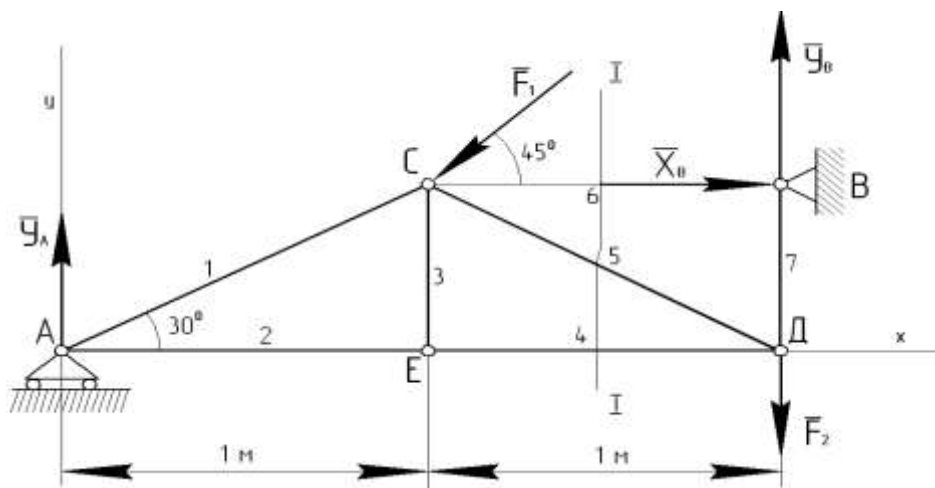


Рис. 54

Решение.

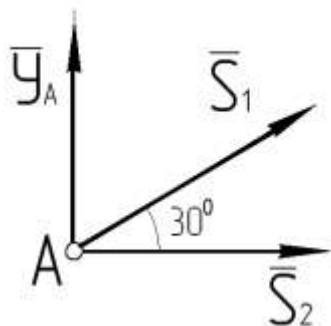
1. Сначала определяем реакции опор A и B : \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B , принимая ферму за твердое тело. Для этого составляем три уравнения равновесия.

$$\begin{aligned}\sum F_{KX} &= 0, & X_B - F_1 \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum F_{KY} &= 0, & Y_A + Y_B - F_2 - F_1 \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum m_B(\bar{F}_K) &= 0, & F_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 - Y_A \cdot 2 &= 0.\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений находим:

$$Y_A = 3,5 \text{ кН}, \quad X_B = 7,1 \text{ кН}, \quad Y_B = 9,6 \text{ кН}.$$

2. Определяем усилия в стержнях. Выделяем узел, в котором сходятся два стержня (это узел A или B). Найдем усилие в 1 и 2 стержнях. Для этого силы \bar{S}_1 и \bar{S}_2 , действующие со стороны стержней на узел A , направляем вдоль стержней, предполагая, что они растягиваются (рис. 54, а).



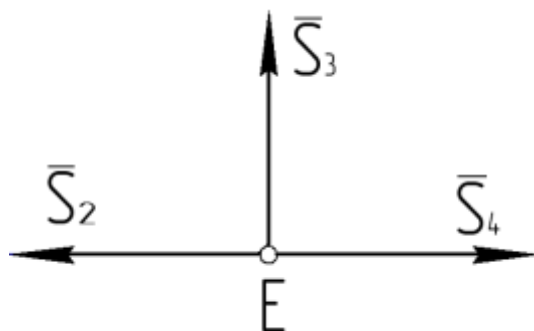
На узел A действует плоская сходящаяся система трех сил. Поэтому составляем два уравнения равновесия, из которых определяем силы \bar{S}_1 и \bar{S}_2 .

$$\begin{aligned}\sum F_{KX} &= 0, & S_1 \cdot \cos 30^\circ + S_2 &= 0; \\ \sum F_{KY} &= 0, & Y_A + S_1 \cdot \cos 60^\circ &= 0, \text{ откуда находим} \\ S_1 &= -7 \text{ кН}, & S_2 &= 6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Рис. 54, а

Знак «минус» у силы \bar{S}_1 означает, что стержень 1 сжат.

Аналогичным образом рассматриваем равновесие узла E (рис. 54, б):



$$\begin{aligned}\sum F_{KX} &= 0, & S_4 - S_2 &= 0; \\ \sum F_{KY} &= 0, & S_3 &= 0.\end{aligned}$$

$$S_4 = S_2 = 6 \text{ кН}.$$

Рис. 54, б

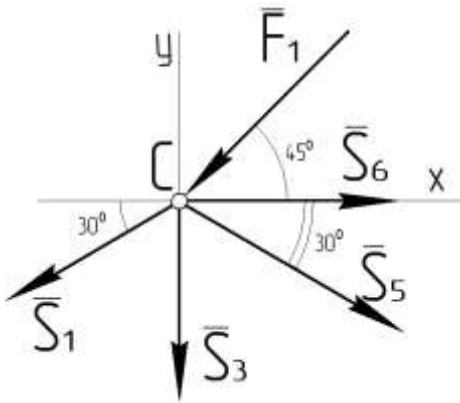


Рис. 54, в

Далее определяем усилия в стержнях 5 и 6. Для этого рассмотрим равновесие узла С, к которому приложена система уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0, S_6 + S_5 \cdot \cos 30^\circ - F_1 \cdot \cos 45^\circ - S_1 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{KY} = 0, -F_1 \cdot \cos 45^\circ - S_5 \cdot \cos 60^\circ - S_3 - S_1 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

Подставив известные численные значения сил, находим:

$$S_5 = -7 \text{ кН}, S_6 = -7 \text{ кН}.$$

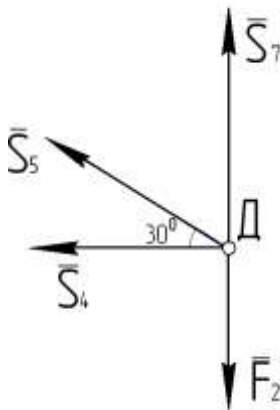


Рис. 54, г

Для нахождения усилия в 7 стержне рассмотрим равновесие узла Д (рис. 54, г). Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0, -S_4 - S_5 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{KY} = 0, S_7 - F_2 + S_5 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

Из второго уравнения определяем S_7 :

$$S_7 = F_2 - S_5 \cdot \cos 60^\circ = 13 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_1 = -7 \text{ кН}$, $S_2 = 6 \text{ кН}$, $S_3 = 0$, $S_4 = 6 \text{ кН}$, $S_5 = -7 \text{ кН}$, $S_6 = -7 \text{ кН}$, $S_7 = 13 \text{ кН}$.

Знаки «минус» указывают, что стержни 1 и 5 сжаты.

Метод сечений (метод Риттера). Здесь также как при способе вырезания узлов определяют сначала реакции опор, а затем разделяют ферму сечением, проходящим не более чем через три стержня, силы в которых подлежат определению, на две части и рассматривают равновесие одной из них, где действие на рассматриваемую часть заменяют силами, направленными вдоль стержней от узлов, т.е. предполагая, что стержни растянуты.

Задача. Определить усилия в стержнях 4, 5, 6 плоской фермы, изображенной на рис. 54 способом сечений, если условие такое же, как и в предыдущей задаче.

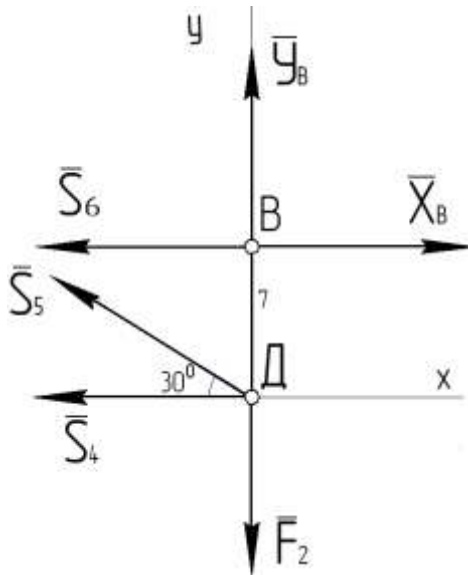


Рис. 55

Решение. Рассечем ферму секущей плоскостью I-I на две части и рассмотрим равновесие правой части (рис. 55). На эту часть фермы действует произвольная плоская система сил, у которой три силы \bar{F}_2 , \bar{X}_B и \bar{Y}_B известны по численному значению. Составим три уравнения равновесия с тремя неизвестными \bar{S}_4 , S_5 , и S_6 :

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_B - S_4 - S_6 - S_5 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_B + S_5 \cdot \cos 60^\circ - F_2 = 0;$$

$$\sum m_D(\bar{F}_K) = 0, \quad S_6 \cdot BD - X_B \cdot BD = 0.$$

Решая эти уравнения получим: $S_4 = 6$ кН, $S_5 = -7$ кН, $S_6 = 7$ кН.

Видно, что усилия в стержнях такие же, как и методом вырезания узлов.

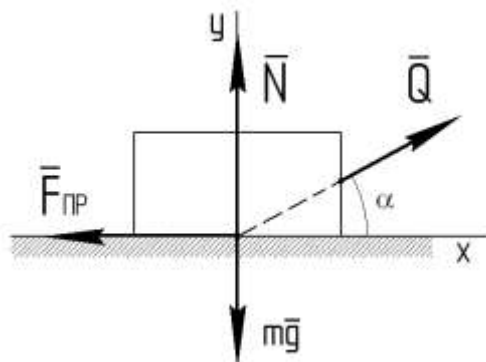
Глава VI

ТРЕНИЕ

§ 25. Трение скольжения

При скольжении одного тела по поверхности другого возникает сила сопротивления, называемая *силой трения скольжения*. Ее возникновение обуславливается в основном шероховатостью поверхностей и силой прижатия этих тел друг к другу. Трение скольжения зависит еще и от других явлений и физико-механических свойств соприкасающихся материалов. Обычно для инженерных расчетов пользуются закономерностями, которые были получены опытным путем с достаточной для практики степени точности, которые формулируются так:

1) При стремлении сдвинуть одно тело относительно другого возникает



сила трения (сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $\vec{F}_{\text{тр}}$, называемого *предельной силой трения* (рис. 56). Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

Рис. 56

3) Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента (статического) трения на силу нормального давления (нормальную реакцию)

$$F_{\text{тр}} = f_0 \cdot N. \quad (37)$$

Статический коэффициент трения f_0 - величина безразмерная; определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (шероховатость, температура, влажность и т.п.).

3) Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей. Поэтому из предыдущих законов следует, что при равновесии

$$F \leq f_0 \cdot N. \quad (38)$$

Значение силы трения может быть любым, но не больше, чем $\bar{F}_{тр}$. Сила трения имеет предельное значение, когда при малейшем ее увеличении тело начинает двигаться (скользить). Равновесие, при равенстве силы трения предельному значению, называется *предельным равновесием*. Значения некоторых коэффициентов трения таковы:

- дерево по дереву 0,4-0,7;

- сталь по стали 0,15-0,25;

- металл по дереву 0,4-0,6;

- сталь по льду 0,027;

сталь по почве:

- песчаные и супесчаные сыпучие 0,25-0,35

- песчаные и супесчаные связные 0,50-0,70

- легко- и среднесуглинистые 0,35-0,50

- тяжелые суглинки и глинистые 0,40-0,90

Если рассматривать движение одного тела по поверхности другого, то в этом случае сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{тр} = f \cdot N$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной безразмерной и определяется опытным путем. Значение f зависит не только от состояния поверхностей и материала, но и от скорости движущихся тел. С увеличением скорости динамический коэффициент сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

§ 26. Реакция шероховатых связей. Угол и конус трения

Реакция шероховатой поверхности складывается из двух составляющих: из нормальной реакции \bar{N} и силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$, где $\bar{N} \perp \bar{F}_{\text{тр}}$. Полная реакция \bar{R} будет отклонена от нормали на угол φ_0 (рис. 57).

Наибольший угол φ_0 называется *углом трения*. Из чертежа видно, что

$\text{tg } \varphi_0 = \frac{F_{\text{тр}}}{N}$, где $F_{\text{тр}} = f_0 \cdot N$. Тогда

$$\text{tg } \varphi_0 = f_0. \quad (39)$$

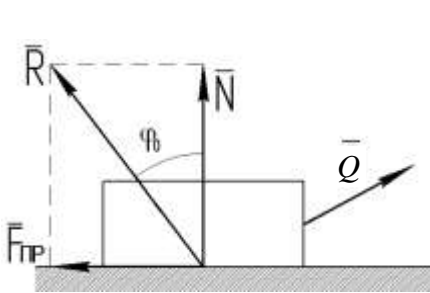


Рис. 57

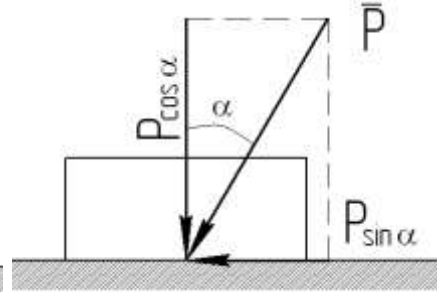


Рис. 58

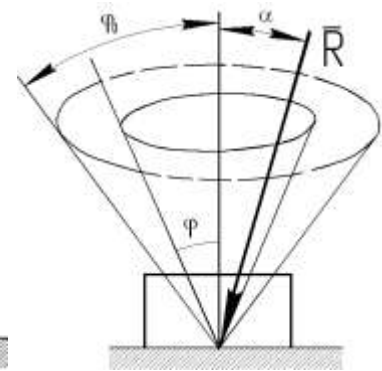


Рис. 59

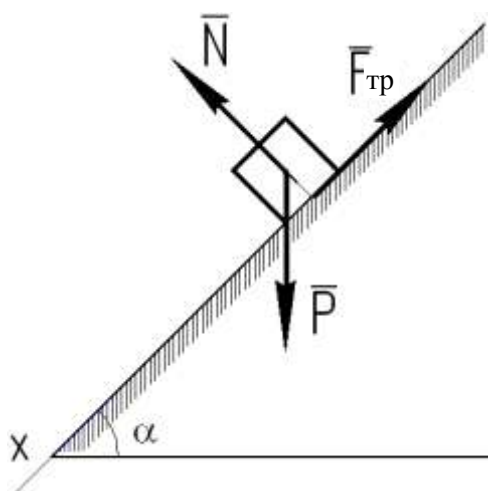
При равновесии полная реакция \bar{R} в зависимости от сдвигающих сил может проходить где угодно внутри угла трения (рис. 58). Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0 .

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу \bar{P} , то тело сдвинется тогда, когда усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{\text{тр}} = f_0 P \cos \alpha$, где $N = P \cos \alpha$, $f_0 = \text{tg } \varphi_0$ или $\text{tg } \alpha > \text{tg } \varphi_0$, т.е. $\alpha > \varphi_0$. Сила \bar{R} может быть направлена к телу с разных сторон. Определяя угол φ_0 с различных направлений получим коническую поверхность, называемую *конусом сцепления* (рис. 59). Аналогичным образом строится конус трения, который располагается внутри конуса сцепления, так как $\varphi < \varphi_0$. Если равнодействующая \bar{R} проходит внутри конуса трения, то тело находится в покое, если же вне конуса сцепления – то в движении. Этим объясня-

ются известные явления заклинивания или самоторможения тел. На нем основаны крепежное соединение болт-гайка, поддержание тяжести домкратами и т.п.

Задача 1. Определить, при каких значениях угла α груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, если его статический коэффициент трения о плоскость равен $f_0 = 0,8$.

Решение. Найдем сначала предельное положение равновесия, при котором угол $\alpha = \alpha_{пр}$. В этом положении (рис. 60) на груз действует сила тяжести \bar{P} , реакция \bar{N} и предельная сила трения $\bar{F}_{тр}$.



Спроецировав все силы на ось X , получим

$P \cdot \sin \alpha - F_{тр} = 0$, где $F_{тр} = f_0 \cdot N$, а $N = P \cdot \cos \alpha$. Тогда получим: $f_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha_{пр}$, $\alpha_{пр} = \operatorname{arctg} f_0 = 38,7^\circ$.

Очевидно, что равновесие будет наблюдаться и при $\alpha < \alpha_{пр}$. Тогда все значения угла α , при которых груз будет в равновесии, определяется неравенством $\operatorname{tg} \alpha \leq f_0$. Эти результаты можно использовать для экспериментального определения коэффициента трения, находя угол $\alpha_{пр}$ из опыта.

Рис. 60

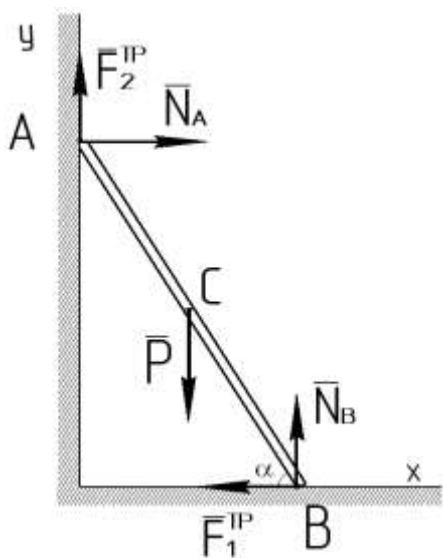


Рис. 61

Задача 2. Однородная лестница, весом 300 Н и длины 3 м опирается одним концом на негладкий пол, а другим концом на негладкую стену (рис. 61). Коэффициент трения лестницы о пол $f_1 = 0,3$, о стену $f_2 = 0,2$. Определить реакции стены \bar{N}_A и пола \bar{N}_B , а также наименьший угол α , образуемый лестницей с полом в положении равновесия (рис. 61).

Решение. Отбросив мысленно связи (пол и стену) покажем действующие на лестницу силы: сила тяжести \bar{P} , приложенная в середине C лестницы; силы трения \bar{F}_1^{TP} и \bar{F}_2^{TP} и силы реакции \bar{N}_A и \bar{N}_B . Действующая на лестницу система сил является произвольной плоской. Уравнениями равновесия будут:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad N_A - F_1^{TP} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad F_2^{TP} - P + N_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_B(\bar{F}_K) = 0, \quad P(\cos \alpha) \frac{AB}{2} - N_A \cdot AB \cdot \sin \alpha - F_2^{TP} \cdot AB \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

где $F_1^{TP} = f_1 \cdot N_B$, $F_2^{TP} = f_2 \cdot N_A$. Подставив эти значения сил трения и заданные величины по условию задачи, получим $\bar{N}_A = 85 \text{ Н}$, $\bar{N}_B = 283 \text{ Н}$, $\alpha_{\min} = 57,4^\circ$. Лестница будет находиться в равновесии и при угле установки $90^\circ > \alpha \geq \alpha_{\min}$.

§ 27. Трение нити о цилиндрическую поверхность

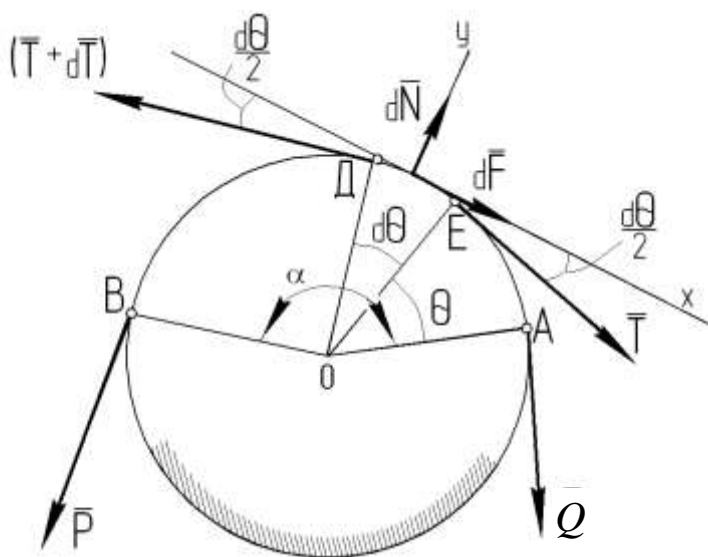


Рис. 62

Пусть к нити, накинутаой на круглый цилиндрический вал (рис. 62), приложена сила \bar{P} .

Надо найти наименьшую силу \bar{Q} , приложенную к другому концу нити, чтобы сохранялось равновесие при данном угле AOB , равным α , если коэффициент трения нити о вал f_0 .

Для решения задачи рассмотрим равновесие элемента нити DE длины $dl = RdQ$, где R – радиус вала.

Разность натяжений нити в точках D и E , равная dT , уравнивается силой трения $dF = f_0 dN$ (dN – нормальная реакция), так как при наименьшей силе Q равновесие является предельным. Следовательно,

$$dT = f_0 dN.$$

Значение dN определим из уравнения равновесия в проекции на ось Y . Полагая синус малого угла высшего порядка, найдем, что

$$dN = T \sin \frac{dQ}{2} + (T + dT) \sin \frac{dQ}{2} = 2T \frac{dQ}{2} = TdQ.$$

Подставляя это значение dN в предыдущее равенство, получим

$$dT = f_0 T dQ.$$

Разделим обе части равенства на T и возьмем интегралы справа в пределах от 0 до α , а слева от Q до P (так как натяжение нити в точке, где $Q=0$, равно Q , а в точке, где $Q=\alpha$, равно P). Получим

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha dQ \quad \text{и} \quad \ln \frac{P}{Q} = f_0 \alpha.$$

Отсюда следует, что $\frac{P}{Q} = e^{f_0 \alpha}$ или

$$Q = P e^{-f_0 \alpha}. \tag{40}$$

Если трением пренебречь, то $Q = P$.

Практически важен тот факт, что увеличивая угол α (навивая нить), можно значительно уменьшить силу Q , необходимую для уравнивания силы P . Например, натяжение в 1000 Н можно уравновесить силой всего 2 Н, дважды обернув пеньковый канат вокруг деревянного столба.

§ 28. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

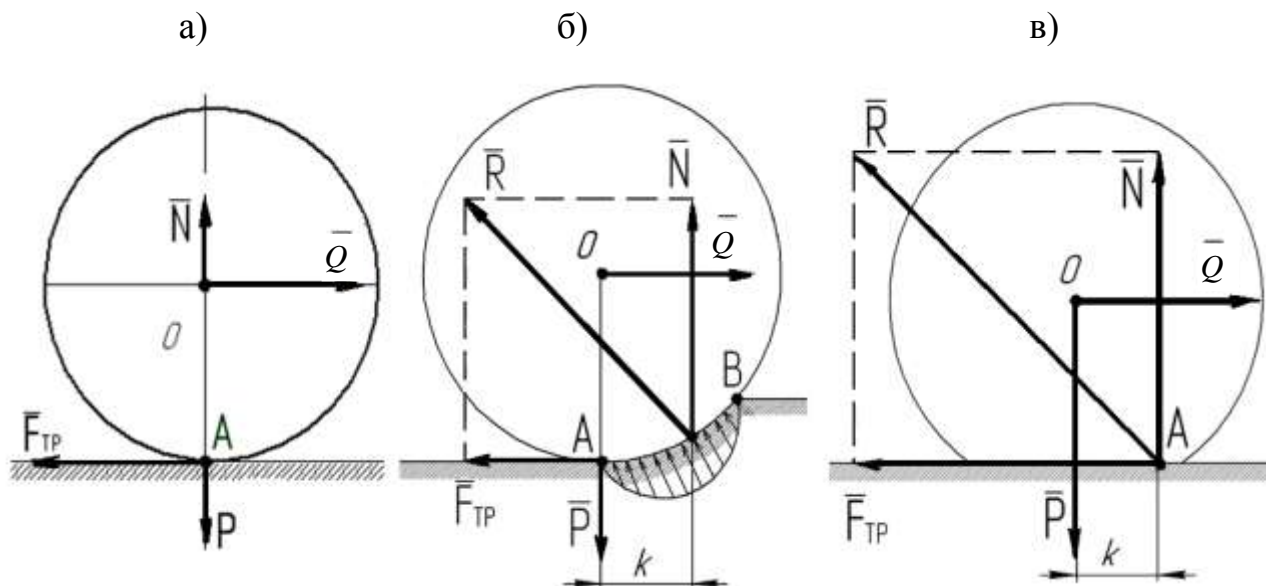


Рис. 63

Рассмотрим цилиндрический каток радиуса R и веса P (рис. 63), лежащий на шероховатой горизонтальной поверхности. Приложим силу \bar{Q} к оси катка (рис. 63, а), меньшую $\bar{F}_{\text{ТР}}$. Тогда в точке A возникает сила трения, численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра. Реакция \bar{N} , приложенная в точке A уравнивает силу \bar{P} . Тогда силы \bar{Q} и $\bar{F}_{\text{ТР}}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При таком положении дел качение должно начаться под действием сколь угодно малой силы Q . На рис. (63, а) представлена модель абсолютно твердого катка, касающегося абсолютно твердой поверхности. На самом деле контакт катка с поверхностью происходит по некоторой площадке, называемой *контактным пятном* (рис. 63, б, в). При перемещении или качении пятно контакта смещается вперед по отношению к вертикальной оси. Тогда и реакция \bar{N} оказывается смещенной в сторону действия силы Q . С увеличением \bar{Q} это смещение растет до некоторой предельной величины k . В предельном по-

ложении на каток будут действовать пара \bar{Q}_{TP} , \bar{F}_{TP} с моментом $\bar{Q}_{TP} \cdot R$ и уравновешивающая ее пара \bar{N} , \bar{P} с моментом $N \cdot k$. Из равенства моментов:

$$Q_{TP} \cdot R = N \cdot k, \text{ получим } Q_{TP} = \frac{k}{R} N. \quad (41)$$

При $Q < Q_{TP}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{TP}$ начинается качение.

Линейная величина k называется *коэффициентом трения качения*. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Некоторые значения k в см для некоторых материалов:

Дерево по дереву	0,05-0,08
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	0,005
Сталь закаленная по стали (подшипник)	0,001
Сталь по дереву	0,01
Сталь по стерне	0,02
Сталь по рыхлой почве	0,03
Сталь по увлажненной почве	0,05

Отношение $\frac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, подшипники и т.п.)

При движении катка под действием движущего (крутящего) момента $M_{\partial e}$ (рис. 64), который передается от двигателя через трансмиссию. Точка A стремится сместиться в сторону, противоположную движения катка. В результате сила трения скольжения направлена по ходу движения. Надо отметить, что при качении возникает момент трения, равный: $M_{TP} = N \cdot k$, который препятствует вращению.

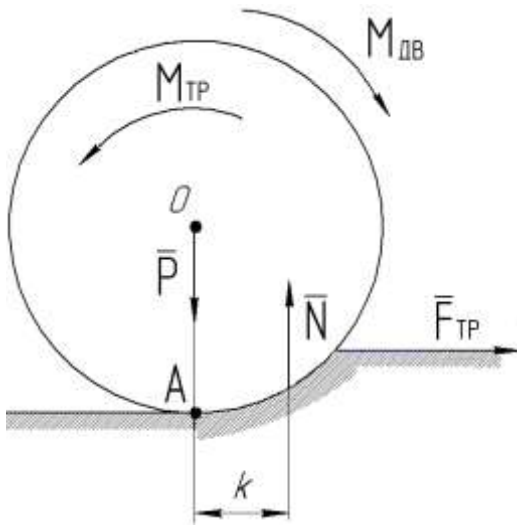


Рис. 64

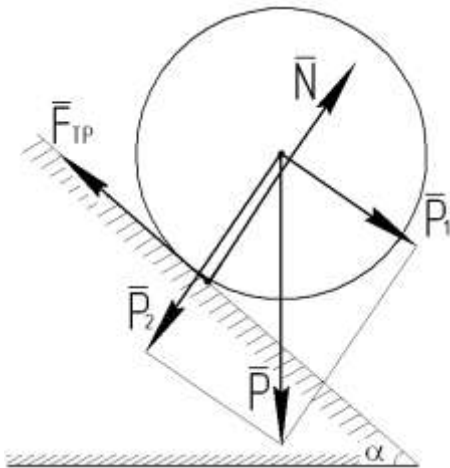


Рис. 65

Задача. Определить, при каких значениях угла α (рис. 65) цилиндр радиуса $R = 25$ см, лежащий на наклонной плоскости, придет в движение, если коэффициент трения качения $k = 8$ см.

Решение. Рассмотрим предельное положение. Разложим силу \bar{P} на две составляющие \bar{P}_1 и \bar{P}_2 . Тогда сдвигающая сила $Q_{пр} = P_1 = P \cdot \sin \alpha$, а нормальная реакция $N = P_2 = P \cdot \cos \alpha$. Применяя формулу (41):

$$Q_{пр} = \frac{k}{R} N, \text{ получим } P \cdot \sin \alpha = \frac{k}{R} P \cdot \cos \alpha$$

или $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{R} = 0,32$. $\alpha = \operatorname{arctg} 0,32 = 17,7^\circ$. Полученным результатом можно воспользоваться для экспериментального определения коэффициента k , находя угол α из опыта.

Глава VII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 29. Момент силы относительно оси.

Главный вектор и главный момент системы сил

Ранее мы определили понятие момента силы относительно центра

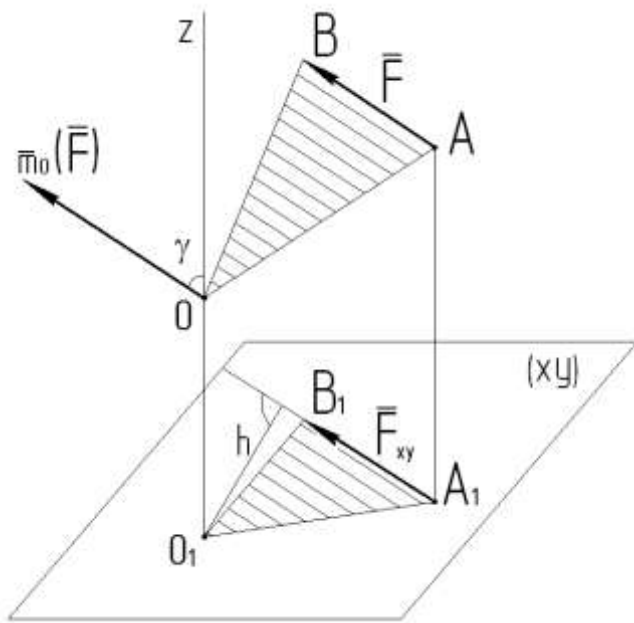


Рис. 66

O . Это вектор $\bar{m}_0(\bar{F})$, направленный перпендикулярно плоскости OAB (рис. 66). Его модуль равен $|m_0(\bar{F})| = 2 \text{пл. } \triangle OAB$. Рассмотрим проекции вектора $\bar{m}_0(\bar{F})$ на координатные оси. Проекция вектора $\bar{m}_0(\bar{F})$ на ось Z называется моментом силы \bar{F} относительно оси Z , т.е.

$$m_z(\bar{F}) = [\bar{m}_0(\bar{F})]_z \text{ или}$$

$$m_z(\bar{F}) = |\bar{m}_0(\bar{F})| \cdot \cos \gamma. \quad (42)$$

Из определения следует, что $m_z(\bar{F})$, как проекция вектора на ось, является величиной алгебраической.

Найдем другое выражение для $m_z(\bar{F})$. Для этого через произвольную точку O_1 проведем ось Z и плоскость XU , перпендикулярную этой оси (рис. 66) и спроектируем $\triangle OAB$ на эту плоскость. Вектор $\bar{m}_0(\bar{F})$ перпендикулярен плоскости OAB , а ось Z перпендикулярна плоскости $O_1A_1B_1$, то угол γ является углом между этими плоскостями. Следовательно:

$$2\text{пл.}\triangle O_1A_1B_1 = 2\text{пл.}\triangle OAB \cdot \cos \gamma = |\bar{m}_0(\bar{F})| \cdot \cos \gamma = m_z(\bar{F}).$$

Из рис. 66 видно, что A_1B_1 есть проекция силы \vec{F} на плоскость XU , и тогда

$$2 \text{ пл. } \Delta O_1A_1B_1 = F_{XY} \cdot h = |\bar{m}_{O_1}(\vec{F}_{XY})|,$$

где $m_{O_1}(\vec{F}_{XY})$ - алгебраический момент силы F_{XY} относительно центра O_1 .

Окончательно имеем

$$m_Z(\vec{F}) = m_{O_1}(\vec{F}_{XY}) \quad \text{или} \quad m_Z(\vec{F}) = \pm F_{XY} h. \quad (43)$$

Момент силы \vec{F} относительно оси Z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью.

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот виден происходящим под действием силы против хода часовой стрелки, и знак минус – когда по ходу часовой стрелки.

Механический смысл величины $m_Z(\vec{F})$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы \vec{F} вокруг оси Z . Если силу \vec{F} разложить на две составляющие \vec{F}_{XY} и \vec{F}_Z : $\vec{F} = \vec{F}_{XY} + \vec{F}_Z$ (рис. 67), то поворот вокруг оси Z будет совершать только составляющая \vec{F}_{XY} . Составляющая $\vec{F}_Z \parallel Z$ и поворот вокруг оси Z не может осуществить. Надо иметь ввиду следующие частные случаи:

- 1) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю;
- 2) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно этой оси равен нулю (так как $h=0$);

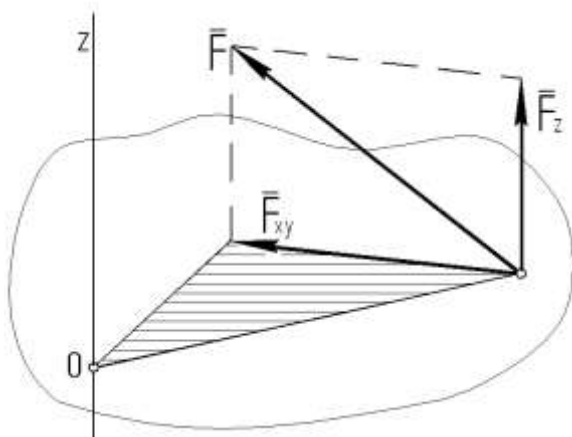


Рис. 67

Объединяя эти случаи, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

3) Если сила перпендикулярна оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на плечо (расстояние от оси до линии действия силы), т.е. вычисляется по формуле (43).

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива и для моментов относительно оси:

$$m_z(\bar{R}) = \sum m_z(\bar{F}_k). \quad (44)$$

Для определения аналитических формул моментов силы относительно координатных осей разложим силу \bar{F} на составляющие \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z параллельные координатным осям (рис. 68). Пусть сила \bar{F} приложена в точке A с координатами X , Y , Z .

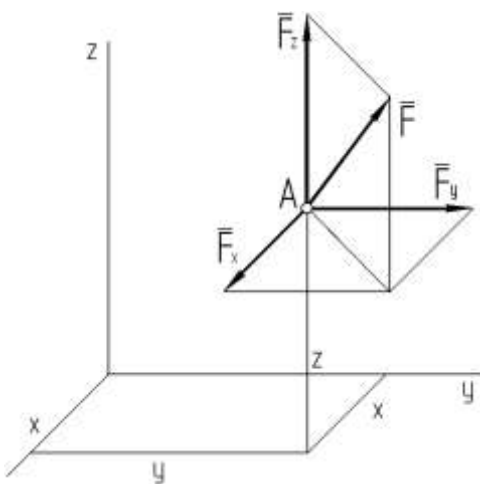


Рис. 68

Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= YF_z - ZF_y, \\ m_y(\bar{F}) &= ZF_x - XF_z, \\ m_z(\bar{F}) &= XF_y - YF_x. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Формулы (45) есть аналитические выражения для моментов силы относительно координатных осей. Не трудно видеть, что модуль момента $\bar{m}_0(\bar{F})$ будет определяться по формуле

$$|\bar{m}_0(\bar{F})| = \sqrt{[m_x(\bar{F})]^2 + [m_y(\bar{F})]^2 + [m_z(\bar{F})]^2}. \quad (46)$$

И главный вектор \bar{R} и главный момент \bar{M}_0 системы сил аналитически будут определяться по их проекциях на координатные оси:

$$R_x = \sum F_{KX}, \quad R_y = \sum F_{KY}, \quad R_z = \sum F_{KZ}; \quad (47)$$

$$M_x = \sum m_x(\bar{F}_K), \quad M_y = \sum m_y(\bar{F}_K), \quad M_z = \sum m_z(\bar{F}_K). \quad (48)$$

Две системы сил, у которых величины \bar{R} и \bar{M}_0 совпадают эквивалентны. Поэтому для задания (определения) любой системы сил, действующих на твердое тело, достаточно задать (определить) ее главный вектор и главный момент относительно некоторого центра, то есть шесть величин, которыми пользуются на практике, определяя, например, аэродинамические силы, действующие на самолет, ракету, автомобиль, или определяя внутренние усилия в частях конструкции.

§ 30. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

Как было показано ранее, любая система сил приводится к главному вектору \bar{R} и к паре с моментом, равным главному моменту \bar{M}_0 .

Определить, к какому виду может приводиться пространственная система сил, не находящаяся в равновесии.

1. Если $\bar{R}=0$, а $\bar{M}_0 \neq 0$, то система сил приводится к паре сил, момент которой равен \bar{M}_0 и вычисляется по формулам (48). Значение \bar{M}_0 от выбора центра не зависит.

2. Если $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_0 = 0$, то система приводится к равнодействующей \bar{R} , линия действия которой проходит через центр O . Значение \bar{R} можно найти по формулам (47).

3. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, но $\bar{M}_0 \perp \bar{R}$, то эта система также приводится к равнодействующей, равной \bar{R} , но не проходящей через центр O .

Действительно, пара, изображаемая вектором \bar{M}_0 , и $\bar{M}_0 \perp \bar{R}$, и сила \bar{R} лежат в одной плоскости (рис. 69). Выбрав силы пары \bar{R}' и \bar{R}'' равными по модулю \bar{R} и

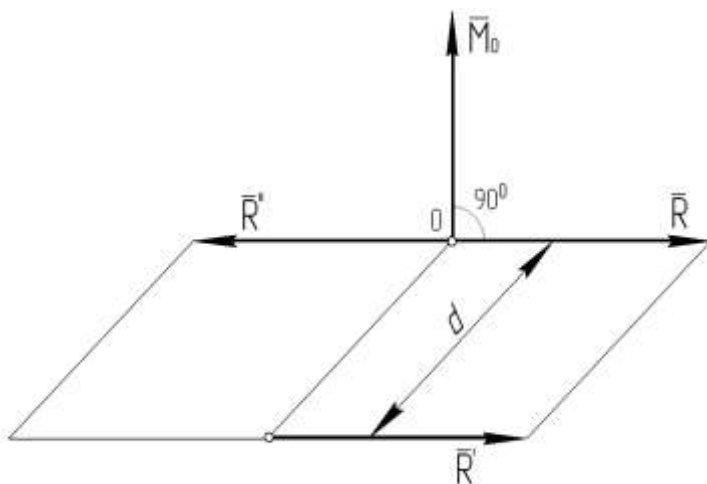


Рис. 69

располагая их так, как показано на рис. 69, получим, что силы \bar{R}' и \bar{R}'' взаимно уравновесятся, и система заменится одной равнодействующей $\bar{R}' = \bar{R}$, линия действия которой проходит через точку O' , где $d = OO'$ и определяется по формуле $Rd = |M_0|$.

Легко убедиться, что рассмотренный случай будет. В частности, всегда иметь место для любой системы параллельных сил или сил, лежащих в одной плоскости, если главный вектор этой системы $\bar{R} \neq 0$.

4. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, и при этом вектор \bar{M}_0 параллелен \bar{R} (рис. 70), то это значит, что система сил приводится к совокупности силы \bar{R} и пары \bar{P} , \bar{P}' , лежащей в плоскости, перпендикулярной силе.

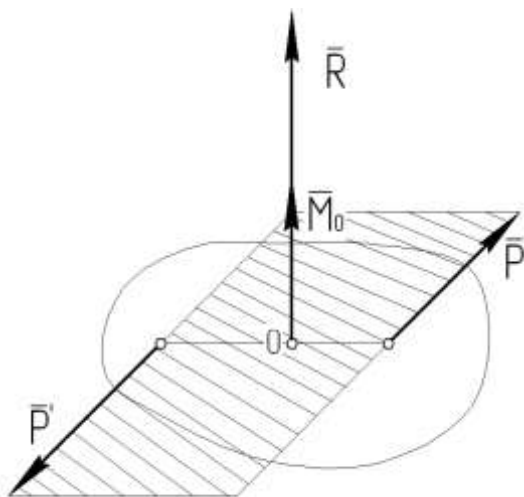


Рис. 70

Такая совокупность силы и пары называется *динамическим винтом*, а прямая, вдоль которой направлен вектор \bar{R} , *осью винта*. Дальнейшее упрощение этой системы сил невозможно.

5. Если $\bar{R} \neq 0$ и $\bar{M}_0 \neq 0$ и при этом векторы \bar{M}_0 и \bar{R} не перпендикулярны друг другу и не параллельны, то такая система сил тоже приводится к динамическому винту, но ось винта не будет проходить через центр O .

§ 31. Равновесие произвольной пространственной системы сил.

Случай параллельных сил

Необходимыми и достаточными условиями любой системы сил являются векторные равенства $\bar{R}=0$, $\bar{M}_0=0$. Но векторы \bar{R} и \bar{M}_0 равны нулю, если $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0 \dots$, т.е. выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{KX} = 0, \quad \sum F_{KY} = 0, \quad \sum F_{KZ} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_y(\bar{F}_K) = 0, \quad \sum m_z(\bar{F}_K) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Если на тело кроме сил действует еще пара, заданная моментом \bar{m} , то при этом вид первых трех уравнений (49) не изменяется, а последние три условия примут вид:

$$\sum m_x(\bar{F}_K) + m_x = 0, \quad \sum m_y(\bar{F}_K) + m_y = 0, \quad \sum m_z(\bar{F}_K) + m_z = 0 \quad (50)$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, то выбрав ось Z параллельно силам (рис. 71) имеем, что проекции каждой из сил на оси X и Y и их моменты относительно оси Z будут равны нулю и система (49) даст три условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_K = 0, \\ \sum m_x(\bar{F}_K) = 0, \\ \sum m_y(\bar{F}_K) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

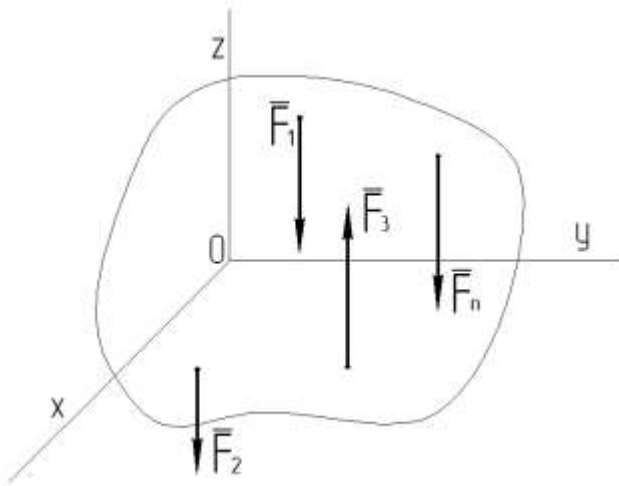


Рис. 71

Остальные равенства обратятся в тождества вида $0 \equiv 0$. Следовательно, для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

Задача. Прямоугольная палка весом 100 Н , длины $a=2 \text{ м}$ и ширины $b=1 \text{ м}$ удерживается в горизонтальном положении сферическим шарниром A , цилиндрическим шарниром B и тонким стержнем CD , который образует с осью Z угол $\alpha=30^\circ$. Определить реакции опор (рис. 72).

Решение. Рассмотрим равновесие крышки. Проведем координатные оси, беря начало в точке B . Изобразим все действующие силы на крышку: \bar{P} - вес крышки, $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Z}_B, \bar{Y}_B, \bar{R}$ - реакции опор.

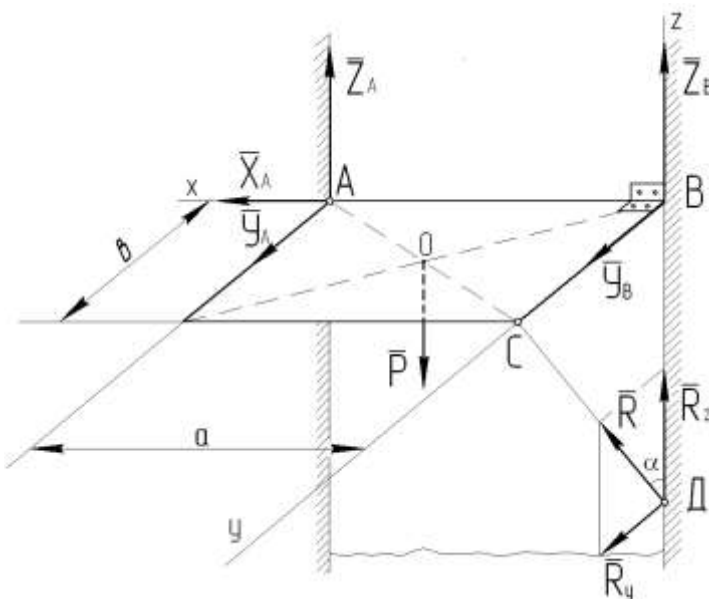


Рис. 72

Применяя условие равновесия для пространственной произвольной системы сил, получим:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A = 0,$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A + Y_B + R \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{KZ} = 0, \quad Z_A + Z_B + R \cos \alpha - P = 0,$$

$$\sum m_x(\bar{F}_K) = 0, \quad R_Y \cdot BD - P \cdot \frac{b}{2} = 0,$$

$$\sum m_Y(\bar{F}_K) = 0, \quad P \cdot \frac{a}{2} - Z_A \cdot a = 0,$$

$$\sum m_Z(\bar{F}_K) = 0, \quad Y_A \cdot a = 0.$$

$$\text{где } R_y = R \cdot \sin \alpha, \quad BD = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 1,7 \text{ м}$$

Подставив в заданные уравнения значение известных величин, получим $X_A = 0$, $Y_A = 0$, $Y_B = -29,4 \text{ Н}$, $Z_A = 50 \text{ Н}$, $Z_B = 24,5 \text{ Н}$, $R = 58,8 \text{ Н}$. Знак «минус» указывает на то, сила \bar{Y}_B должна быть направлена противоположно, чем на чертеже.

Глава VIII ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 32. Центр параллельных сил

Понятие о центре параллельных сил используется для определения центров тяжести тел.

Рассмотрим две параллельные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенные в точках A_1 и A_2 твердого тела (рис. 73).

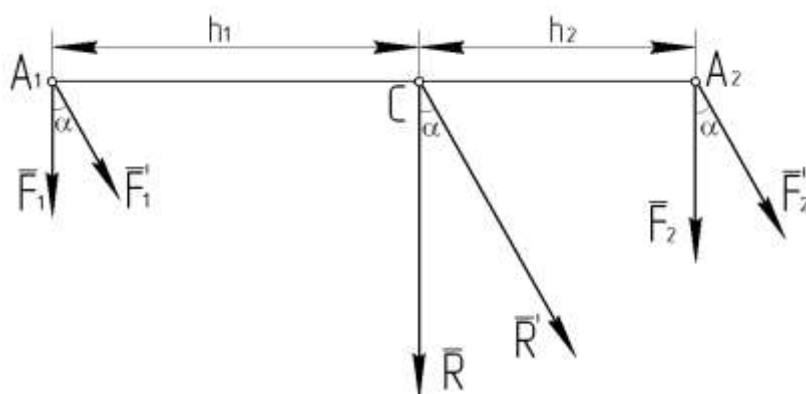


Рис. 73

Очевидно, что $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ линия действия силы \vec{R} параллельна силам \vec{F}_1 и \vec{F}_2 и приложена к точке C , лежащей на прямой A_1A_2 .

Положение точки C можно найти с помощью теоремы Вариньона. Так как $m_c(\vec{R}) = m_c(\vec{F}_1) + m_c(\vec{F}_2)$ или $0 = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = F_1 \cdot A_1C - F_2 \cdot A_2C$.

При повороте сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на некоторый угол α образуются две силы \vec{F}_1' и \vec{F}_2' , которые по модулю те же самые. Значит и равнодействующая сила \vec{R}' тоже пройдет через точку C . Такая точка называется *центром параллельных сил*.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу в точках A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 74). Эта система сил имеет равнодействующую $\vec{R} = \sum F_k$, модуль которой

$$R = \sum F_k \quad (52)$$

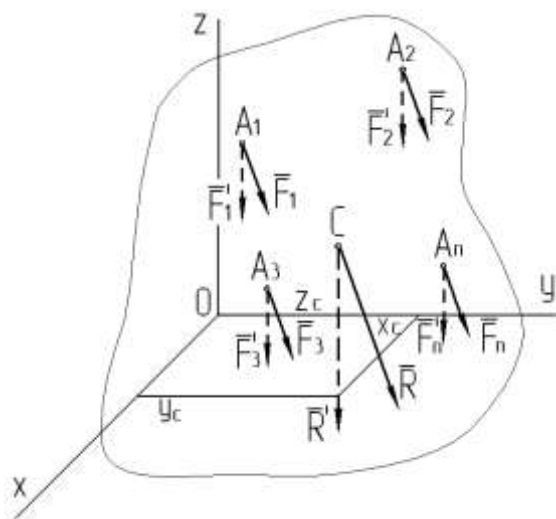


Рис. 74

Если каждую из сил системы поворачивать около точки ее приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол, то будут получаться новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения. Равнодействующая каждой из таких систем сил будет иметь тот же модуль R , но всякий раз другое направление и равнодействующая проходит через одну и ту же точку C .

Точка C называется *центром параллельных сил*.

Возьмем произвольные координатные оси $Oxyz$ и найдем координаты точки C . Обозначим координаты точек: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ... $C(x_c, y_c, z_c)$. Так как направления сил от положения точки C не зависит, повернем сначала силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельными оси Oz , и применим к повернутым силам $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$ теорему Вариньона. Так как $\overline{R'}$ является равнодействующей этих сил, то, беря моменты относительно оси Oy , найдем, что

$$m_y(\overline{R'}) = \sum m_y(\overline{F'}). \quad (53)$$

Но из чертежа видно, что $m_y(\overline{R'}) = R \cdot x_c$, так как $R' = R$; аналогично $m_y(\overline{F'_1}) = F_1 x_1$, так как $F'_1 = F_1$, и т.д. Подставляя все эти величины в равенство (53), получим:

$$R x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum F_k x_k$$

$$\text{Отсюда определим } x_c: x_c = \frac{1}{R} \sum F_k x_k .$$

Для координаты y_c и z_c аналогичные формулы находятся, беря моменты относительно осей Ox и Oz . Т.е. окончательно имеем следующие формулы для координат центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{1}{R} \sum F_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{R} \sum F_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{R} \sum F_k z_k, \quad (54)$$

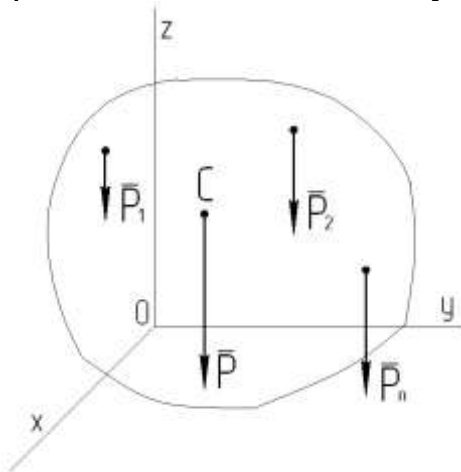
где R определяется равенством (52). Надо отметить, что формулы (52) и (54) будут справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны.

§ 33. Силовое поле.

Центр тяжести твердого тела

Силовым полем называется область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила.

На каждую частицу тела, которая находится вблизи земной поверхности, действует *сила тяжести*, направленная вертикально вниз. Если размеры тел малы по сравнению с радиусом земли, то можно считать, что силы тяжести их параллельны друг другу и сохраняют постоянное значение. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют *однородным полем тяжести*.



Обозначим через \bar{P} (рис. 75) равнодействующую сил тяжестей $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$. Модуль этой силы называется *весом тела* и определяется равенством

$$P = \sum p_k. \quad (55)$$

Рис. 75

Равнодействующая \bar{P} сил \bar{p}_k будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же точку C , являющуюся центром параллельных сил тяжестей \bar{p}_k .

Эта точка и называется центром тяжести тела. Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются по формулам (54); т.е.:

$$X_C = \frac{1}{P} \sum P_K X_K, \quad Y_C = \frac{1}{P} \sum P_K Y_K, \quad Z_C = \frac{1}{P} \sum P_K Z_K, \quad (56)$$

где: X_K, Y_K, Z_K - координаты точек приложения сил тяжести \bar{p}_k .

Центр тяжести – это геометрическая точка. Поэтому она может лежать вне пределов данного тела (например, для кольца).

§ 34. Координаты центров тяжести однородных тел

Для однородного тела вес P_K любой его части пропорционален объему V_K этой части: $P_K = \gamma V_K$, а вес всего тела пропорционален объему V этого тела, т.е. $P = \gamma V$, где γ - вес единицы объема. Подставив эти значения в формулы (56), получим

$$X_C = \frac{1}{V} \sum V_K X_K, \quad Y_C = \frac{1}{V} \sum V_K Y_K, \quad Z_C = \frac{1}{V} \sum V_K Z_K. \quad (57)$$

Из формул (57) видно, что положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. Тогда точку C называют *центром тяжести объема V* .

Рассуждая аналогично, можно легко определить координаты центра тяжести однородной плоской тонкой пластины:

$$X_C = \frac{1}{S} \sum S_K X_K, \quad Y_C = \frac{1}{S} \sum S_K Y_K, \quad Z_C = \frac{1}{S} \sum S_K Z_K, \quad (58)$$

где S - площадь всей пластины;

S_K - площади ее частей.

Точка C – центр тяжести площади S .

Аналогично получаются формулы для координат центра тяжести линии:

$$X_C = \frac{1}{L} \sum l_K X_K, \quad Y_C = \frac{1}{L} \sum l_K Y_K, \quad Z_C = \frac{1}{L} \sum l_K Z_K, \quad (59)$$

где L - длина всей линии;

l_K - длины ее частей.

По формулам (59) можно находить центры тяжести изделий из тонкой проволоки постоянного сечения.

§ 35. Способы определения координат центров тяжести тел

Для более простого использования выше указанных формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр лежит соответственно или в плоскости, или на оси, или в центре симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

2. Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно найти по формулам (56) – (59). При этом число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Задача. Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис. 76. Все размеры даны в сантиметрах.

Решение. Проводим оси X и Y и разбиваем пластину на три прямоугольника. Вычисляем координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3;$$

$$y_1 = 13, y_2 = 7, y_3 = 1;$$

$$s_1 = 4, s_2 = 28, s_3 = 12.$$

Площадь всей пластины $S = S_1 + S_2 + S_3 = 44 \text{ см}^2$.

Подставляя эти значения в формулы (58), получим:

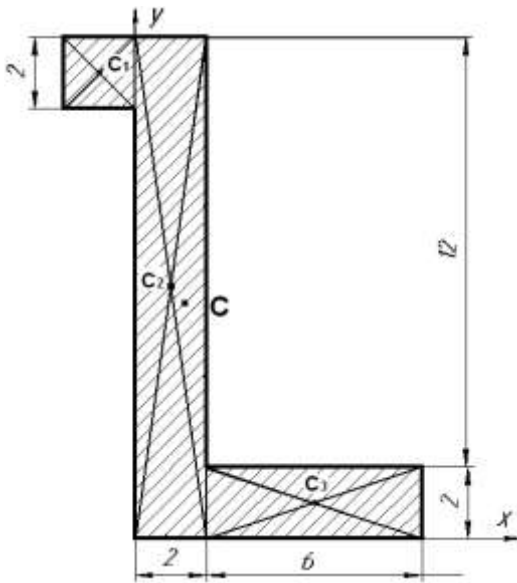


Рис. 76

$$X_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S} = \frac{-4 + 28 + 36}{44} = 1,36 \text{ см},$$

$$Y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S} = \frac{52 + 196 + 12}{44} = 5,9 \text{ см}.$$

Найденное положение центра тяжести C показано на чертеже.

3. Дополнение. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Задача. Определить координаты центра тяжести круглой пластины, изображенной на рис. 77. Все размеры даны в сантиметрах.

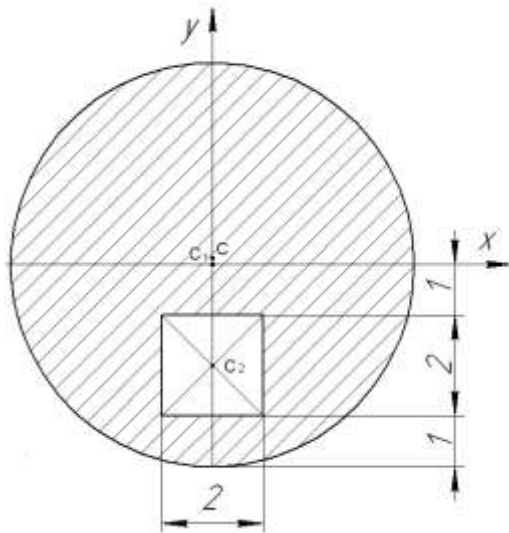


Рис. 77

Решение. Центр тяжести пластины лежит на оси Y (линии $C_1 C_2$), так как эта линия является осью симметрии. Проведя координатные оси находим центры тяжести круга и квадрата, а также их площади. При этом площадь квадрата должна браться со знаком минус. Итак:

$$Y_1 = 0, Y_2 = -2,$$

$$S_1 = \pi R^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ см}^2, S_2 = -2^2 = -4 \text{ см}^2,$$

$$S = S_1 - S_2 = 46,24 \text{ см}^2.$$

Подставляя найденные значения в формулу (58), получаем

$$Y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S} = \frac{0 - 2 \cdot (-4)}{46,24} = 0,17 \text{ см}.$$

Найденный центр тяжести C лежит выше точки C_1 .

4. Интегрирование. Если твердое тело нельзя разбить на конечное число частей, положение центров тяжести которых известны, то тело разбивают сначала на малые объемы ΔV_k , для которых

$$X_c = \frac{1}{V} \sum X_k \Delta V_k \text{ и т.д.}, \quad (60)$$

где: X_k, Y_k, Z_k - координаты некоторой точки, лежащей внутри объема ΔV_k .

Переходя к пределу при $\Delta V_k \rightarrow 0$, получим в пределе:

$$X_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad Y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad Z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv. \quad (61)$$

Аналогично для координат центров тяжести площадей и линий получаем в пределе

$$X_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad Y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds \quad (62)$$

и

$$X_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad Y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad Z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (63)$$

5. Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, паровоз, трактор и т.п.) можно определить экспериментально. Один из таких методов заключается в том, что тело подвешивают на гибкой связи (трос) за различные его точки, считая за направление троса направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Другим возможным способом экспериментального определения центра тяжести является метод взвешивания.

Пример. Определить координату центра тяжести самолета (расстояние a), если расстояние $AB = l$ (рис. 78) известно. Поставив колесо B на платформу весов, найдем взвешиванием силу давления колеса на платформу. Она численно равна реакции N_1 . Аналогично находим реакцию N_2 . Составляем уравнение моментов относительно точки C : $N_2 a - N_1 (l - a) = 0$, откуда находим

$$a = \frac{lN_1}{N_1 + N_2},$$

где: $N_1 + N_2 = P$ - вес самолета.

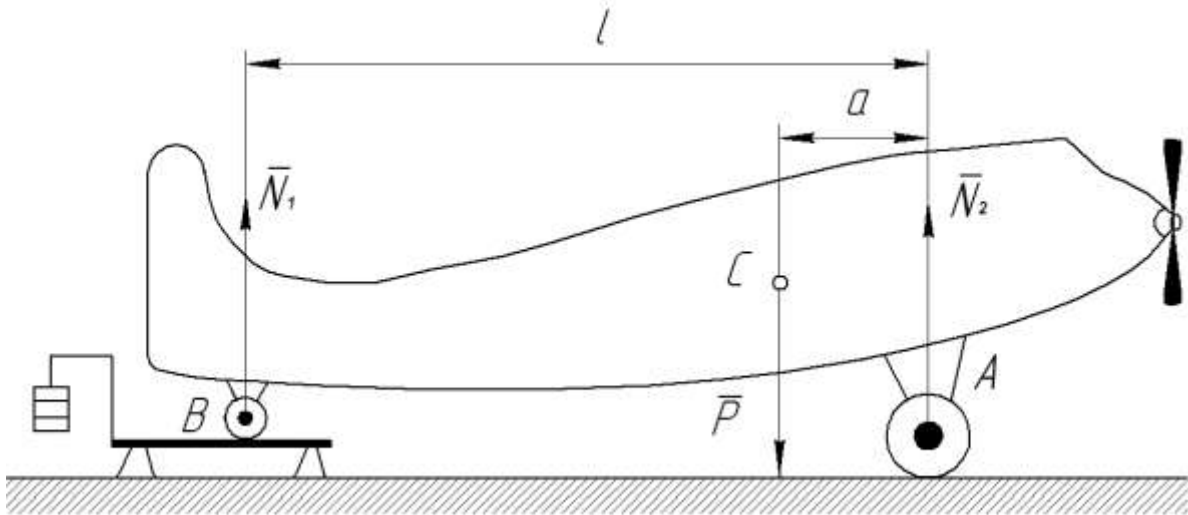
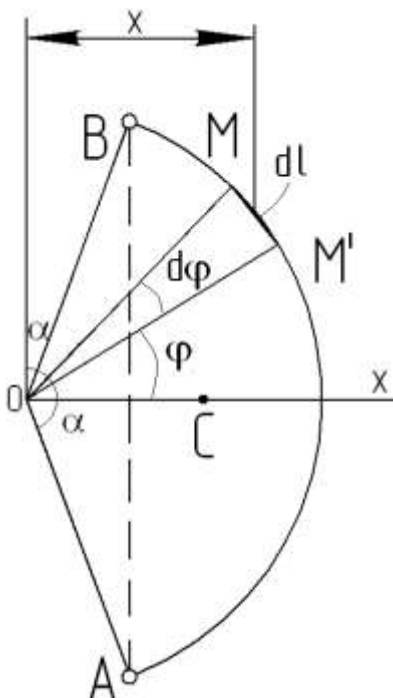


Рис. 78

Если заранее известен вес самолета P , то для определения a можно обойтись только одним взвешиванием.

§ 36. Центры тяжести некоторых однородных тел



1. Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$.

В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 79).

Рис. 79

Найдем координату X_c по формуле (63). Выделим элемент дуги MM' длиной $dl = R d\varphi$. Тогда координата X элемента MM' будет равна $X = R \cos \varphi$. Подставляя эти значения X и dl в формулу (63), получим:

$$X_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha,$$

где: L - длина дуги AB , которая равна: $L = R \cdot 2\alpha$.

Отсюда имеем:

$$X_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (64)$$

где α измеряется в радианах.

2. Центр тяжести площади треугольника. Разобьем всю площадь треугольника прямыми, параллельными стороне AD (рис. 80), на n узких полосок. Очевидно, что центры тяжести этих полосок лежат на медиане BE треугольника.

Тогда и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается и для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

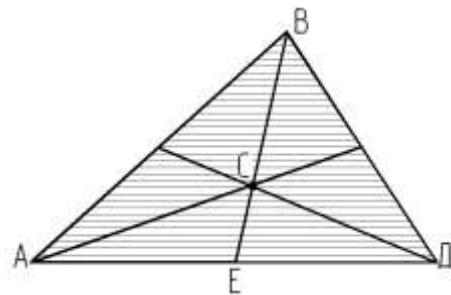


Рис. 80

3. Центр тяжести площади кругового сектора. Рассмотрим круговой сектор OAB (рис. 81) радиуса R с центральным углом 2α . Разобьем площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O , на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n , эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса $2R/3$. Следовательно, центр тяжести сектора совпадает с центром тяжести дуги DE , положение которой найдется по формуле (64).

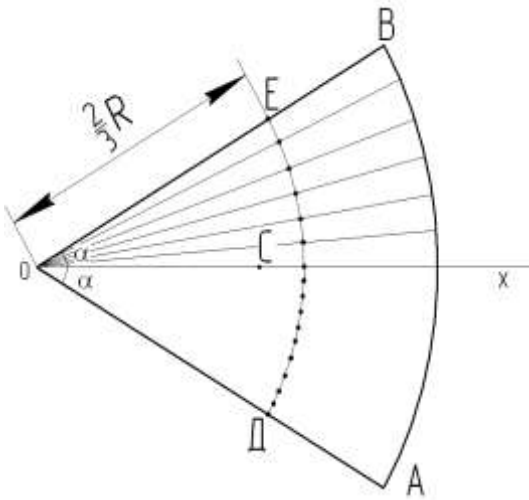


Рис. 81

Окончательно получаем:

$$X_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (65)$$

Центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии OC .

4. Центр тяжести объема пирамиды (или конуса).

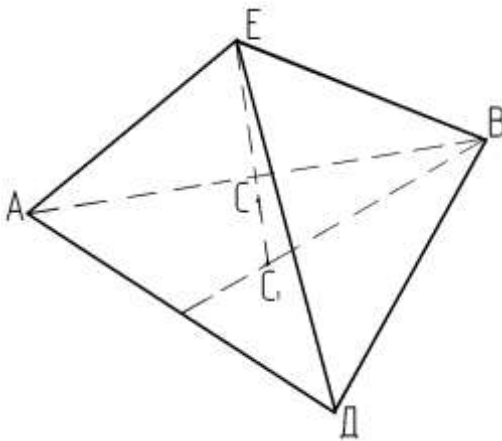


Рис. 82

Этот центр C лежит на прямой EC_1 , где E – вершина, C_1 – центр тяжести площади основания пирамиды; при этом

$$CC_1 = \frac{EC_1}{4}. \quad (66)$$

Результат справедлив для любой многоугольной пирамиды и для конуса.

5. Центр тяжести объема полушара. Этот центр C лежит на оси Ox (оси симметрии), а его координата равна:

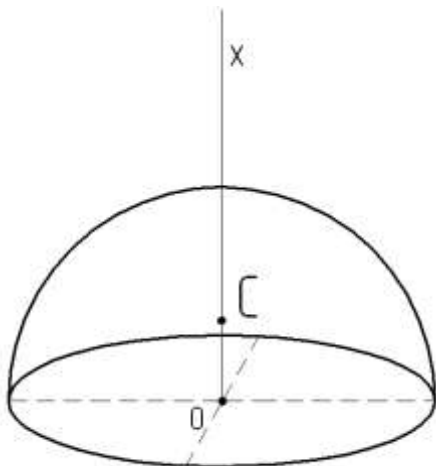


Рис. 83

$$X_c = OC = \frac{3}{8} R, \quad (67)$$

где R – радиус полушара.

Формулы, определяющие координаты центров тяжести других однородных тел, можно найти в различных технических справочниках.

Глава IX

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется статикой?
2. Что понимают под равновесием твердых тел?
3. Что называется абсолютно твердым телом?
4. Что понимают в механике под силой?
5. Какие величины разделяются в механике на скалярные и векторные?
6. Что такое линия действия силы?
7. Что называется системой сил?
8. Что называется сходящейся системой сил?
9. Что называется системой параллельных сил?
10. Какие системы называются эквивалентными?
11. Что называется уравновешенной системой сил?
12. Что называется уравновешенной силой?
13. Что такое внешние и внутренние силы?
14. Что называется сосредоточенной силой?
15. Какие силы называются распределенными?
16. Какие основные задачи решает статика?
17. Сформулировать основные аксиомы статики.
18. Какое тело называется несвободным?
19. Что называется связью?
20. Привести примеры несвободных тел.
21. Что называется силой реакции?
22. Куда направлены силы реакции связей?
23. Перечислить основные виды связей.
24. Как можно разложить силу по двум и трем заданным направлениям.
25. Что такое проекция силы на координатную ось?
26. Как определить модуль силы и её направления по известным проекциям?

27. Сформулировать геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил.
28. Сформулировать аналитическое условие равновесия сходящейся системы сил
29. Как читается теорема о трёх силах?
30. Каков порядок решения задач статики?
31. В чем заключается суть геометрического и аналитического методов решения задач?
32. Дать понятие момента силы относительно центра и оси.
33. Что называется парой сил?
34. Что называется моментом пары сил?
35. Какие пары сил называются эквивалентными?
36. Как читается теорема о сложении пар сил?
37. Как читается теорема о параллельном переносе силы?
38. Как читается теорема о проведении системы сил?
39. Как читается теорема Вариньона?
40. Назвать условие равновесия системы параллельных сил?
41. Какая система сил называется произвольной?
42. Главный вектор и главный момент.
43. Назвать условия равновесия произвольной системы сил?
44. Что такое статические определимые и статически неопределимые системы тел?
45. Что называется фермой?
46. В чём заключается метод вырезание узлов?
47. В чём заключается метод вырезание сечений (метод Риттера)?
48. Что называется силой трения скольжения?
49. Чему равна предельная сила трения?
50. Куда направлена сила трения скольжения?
51. От чего зависит коэффициент трения скольжения?
52. Что называется углом трения?
53. Что называется трением качения?

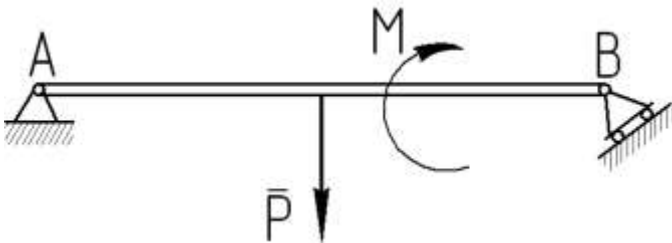
54. Что называется коэффициентом трением качения?
55. Дать понятие момента трения.
56. Что называется пространственной системой сил?
57. Как вычисляется главный вектор и главный момент системы сил?
58. Условия равновесия пространственной системы сил?
59. Что называется центром параллельных сил?
60. Дать понятия силового поля?
61. Что называется силой тяжести тела?
62. Дать определение центра тяжести тела.
63. Как определяются координаты центров тяжести однородных тел?

Глава X

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СТАТИКЕ

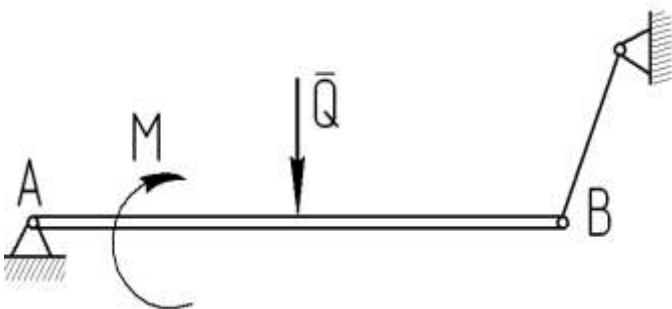
1. Сила - мера механического действия одного тела на другое характеризуется:
- а) модулем;
 - б) модулем и направлением;
 - в) модулем, направлением и точкой приложения;
 - г) модулем и точкой приложения.

2. реакция опоры в точке B правильно направлена...



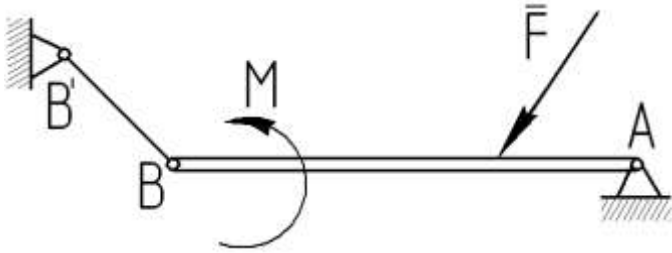
- а)
- б)
- в)
- г)

3. Реакция опоры в точке A правильно направлена...



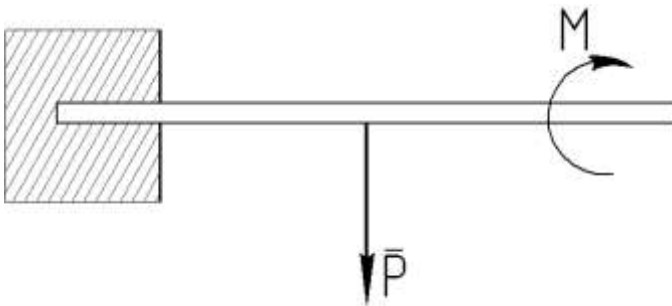
- а)
- б)
- в)
- г)

4. Реакция опоры тонкого стержня BB' с шарнирами на концах правильно направлена...



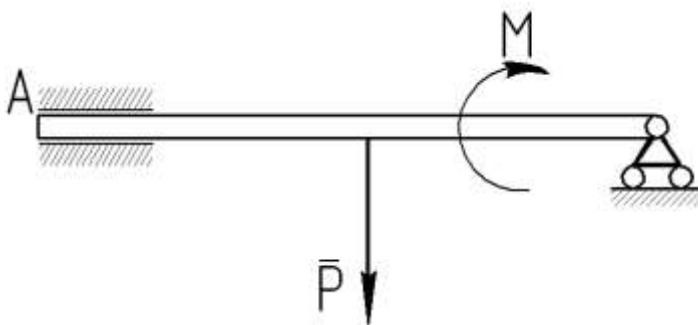
- а)
- б)
- в)
- г)

5. Реакция жесткой заделки правильно направлена...



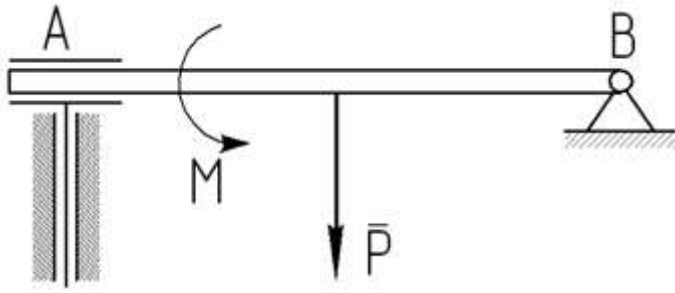
- а)
- б)
- в)
- г)

6. Реакция скользящей заделки A правильно направлена...



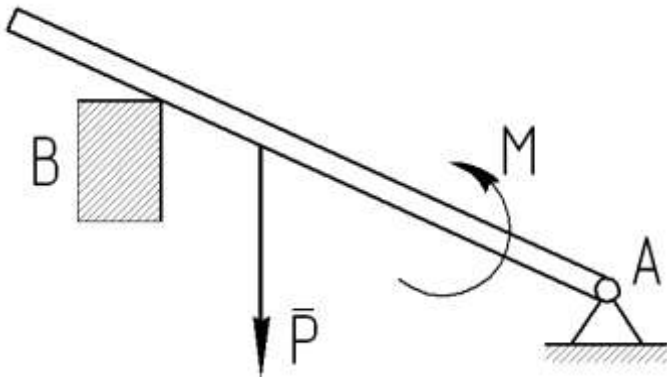
- а)
- б)
- в)
- г)

7. Реакция бискользящей заделки A правильно направлена...



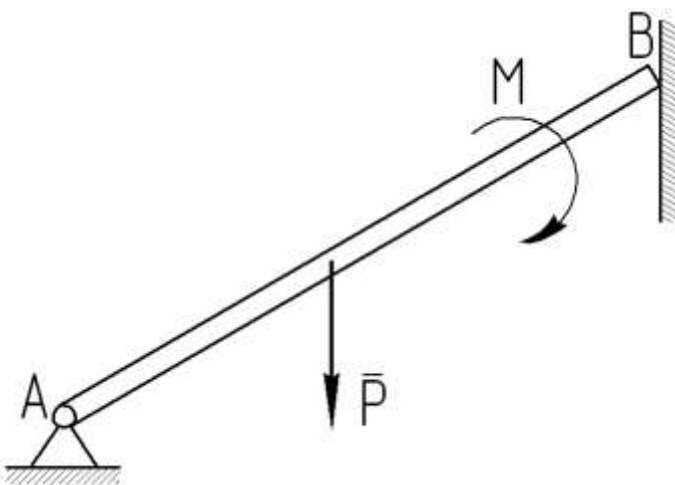
- а)
- б)
- в)
- г)

8. Показать реакцию опоры B



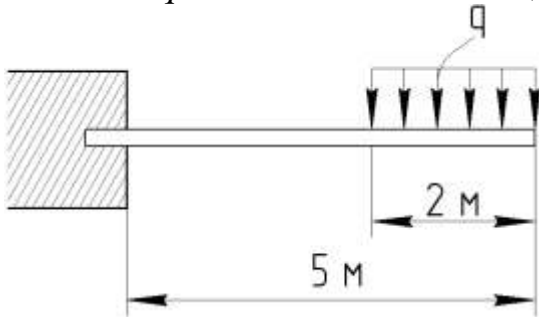
- а)
- б)
- в)
- г)

9. Показать реакцию опоры B



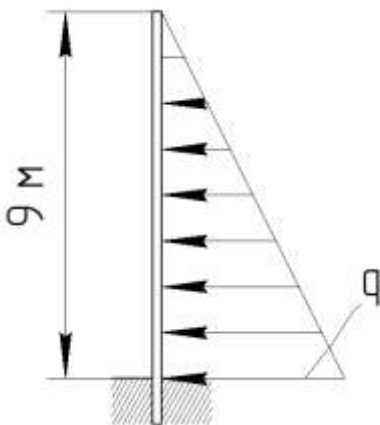
- а)
- б)
- в)
- г)

10. На горизонтальную невесомую балку, жестко заделанную одним концом, действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20$ кН/м. Момент заделки равен...



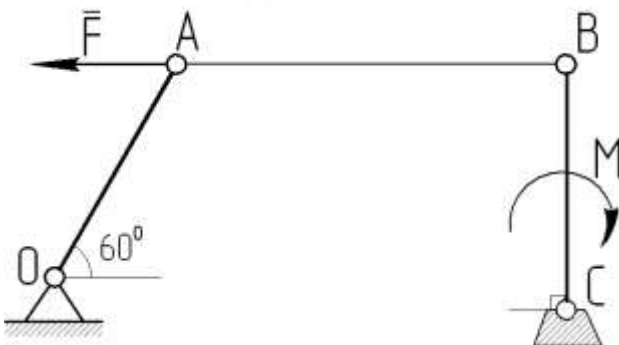
- а) 100 кН·м
- б) 80 кН·м
- в) 40 кН·м
- г) 120 кН·м
- д) 160 кН·м
- е) 200 кН·м

11. На вертикально невесомую балку, жестко заделанную одним концом, действует линейно распределенная нагрузка максимальной интенсивности $q = 10$ кН/м. Момент заделки равен...



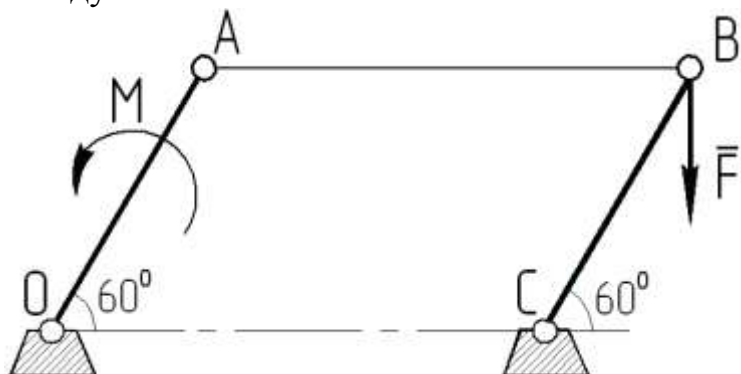
- а) 50 кН·м
- б) 100 кН·м
- в) 105 кН·м
- г) 115 кН·м
- д) 125 кН·м
- е) 135 кН·м

12. Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии над действием силы \bar{F} и момента M . где $OA=r$, $BC=a$. Правильным соотношением между силой и моментом является...



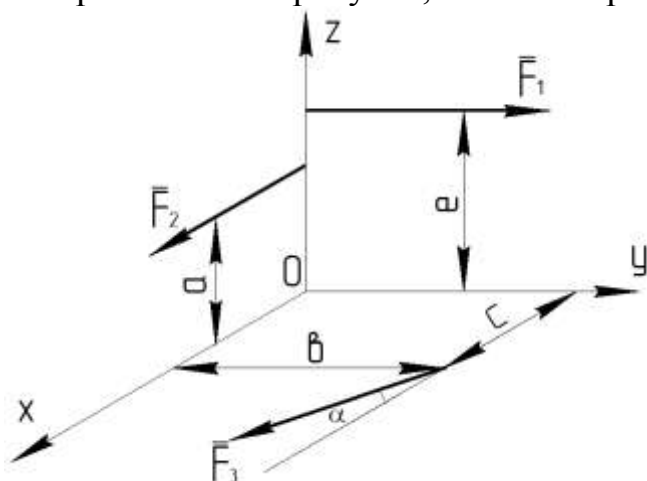
- а) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$
- б) $M = F \cdot r$
- в) $M = F \cdot a$
- г) $M = F \cdot r \frac{\sqrt{3}}{2}$
- д) $M = F \cdot r \sqrt{3}$
- е) $M = 0,5F \cdot a$

13. Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы \vec{F} и момента M , где $OA=r$, $BC=a$. Правильным соотношением между силой и моментом является...



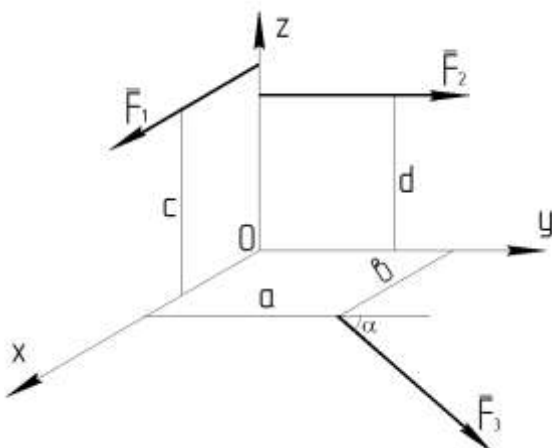
- а) $M = F \cdot a$
- б) $M = F \cdot a \sqrt{3}$
- в) $M = 0,5F \cdot r$
- г) $M = F \cdot r$
- д) $M = \frac{\sqrt{3}}{2} F \cdot r$
- е) $M = \frac{\sqrt{3}}{2} F \cdot a$

14. Сила $\vec{F}_1 \parallel OY$, сила $\vec{F}_2 \parallel OX$, сила \vec{F}_3 лежит в плоскости XOY . Расстояния на рисунке равны a , b , c , e . Проекция главного момента системы сил, изображенных на рисунке, на ось OX равна...



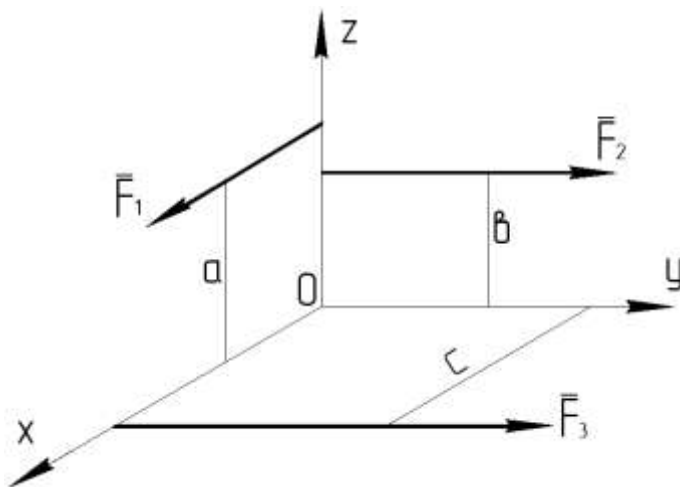
- а) $m_x(\vec{F}_k) = aF_2$
- б) $m_x(\vec{F}_k) = -bF_2 \sin \alpha$
- в) $m_x(\vec{F}_k) = -eF_1$
- г) $m_x(\vec{F}_k) = 0$
- д) $m_x(\vec{F}_k) = cF_2 \cos \alpha$

15. Сила $\vec{F}_1 \parallel OX$, сила $\vec{F}_2 \parallel OY$, а сила \vec{F}_3 лежит в плоскости XOY . Расстояния от осей до сил указаны на рисунке. Проекция главного момента относительно оси OY равна...



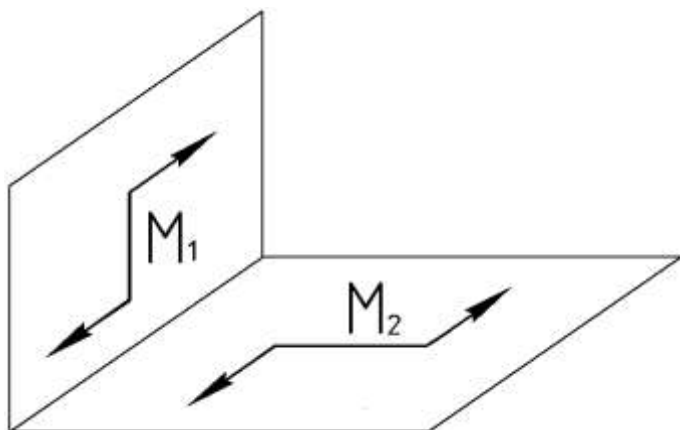
- а) $m_y(\vec{F}_k) = 0$
- б) $m_y(\vec{F}_k) = c \cdot F_1$
- в) $m_y(\vec{F}_k) = aF_3 \cos \alpha$
- г) $m_y(\vec{F}_k) = bF_3 \cos \alpha$
- д) $m_y(\vec{F}_k) = d \cdot F_2$
- е) $m_y(\vec{F}_k) = a \cdot F_1$

16. Сила $\vec{F}_1 \parallel OX$, сила $\vec{F}_2 \parallel OY$, $\vec{F}_3 \parallel OZ$ а расстояния сил до осей указаны на рисунке. Проекция главного момента на ось



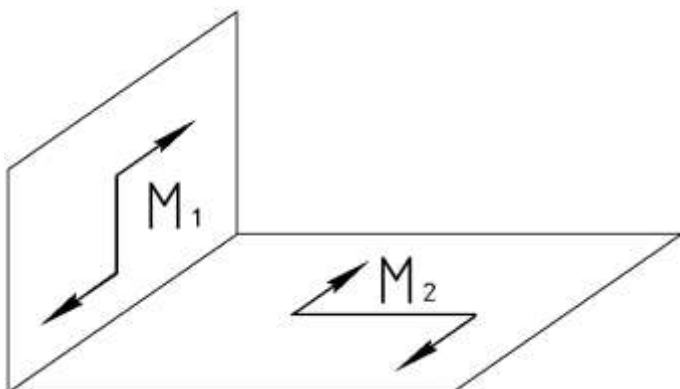
- а) $M_z = aF_1$
- б) $M_z = 0$
- в) $M_z = bF_2$
- г) $M_z = cF_3$
- д) $M_z = aF_3$

17. К прямоугольной полке приложены две пары сил с моментами $M_1 = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_2 = 12 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Момент пары сил, эквивалентной этим двум парам, равен...



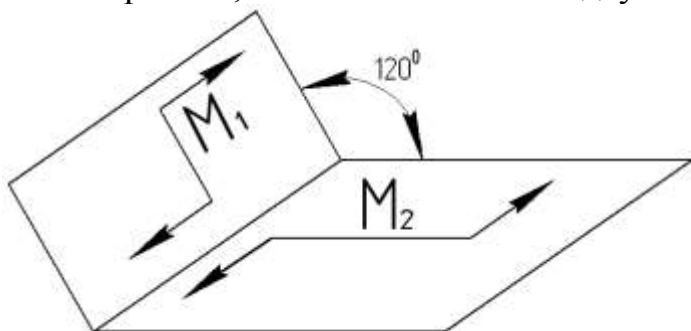
- а) $17 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- б) $7 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- в) $8,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- г) $13 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- д) $15 \text{ Н}\cdot\text{м}$

18. К прямоугольному уголку приложены две пары сил с моментами $M_1 = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_2 = 8 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Момент пары сил, эквивалентной этим двум парам, равен...



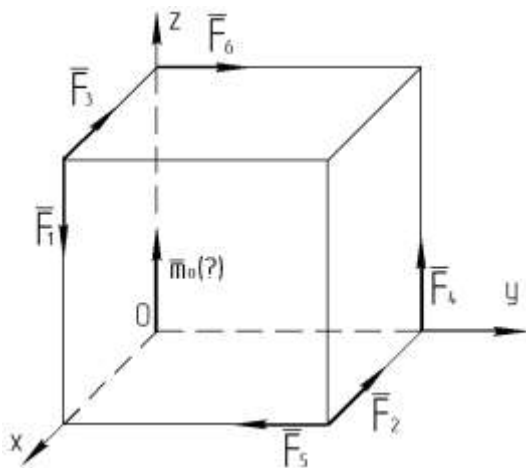
- а) $9,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- б) $7 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- в) $17 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- г) $11,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$

19. К двум плоским плитам, соединенных под углом 120° , приложены две пары сил с моментами $M_1=M_2=4$ Н·м. Момент пары сил, эквивалентной этим двум парам, равен...



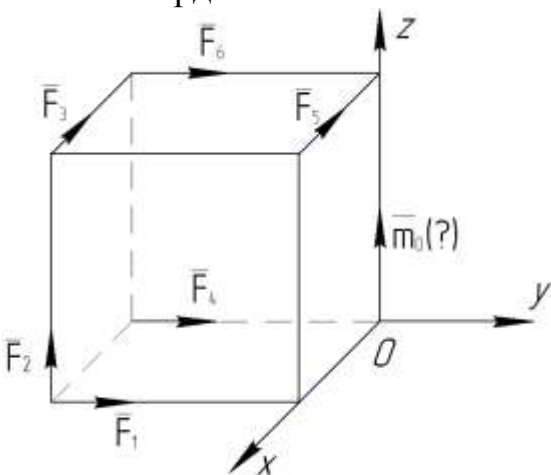
- а) 8 Н·м
- б) 10 Н·м
- в) 6 Н·м
- г) 4 Н·м
- д) 2 Н·м

20. К вершинам куба приложены силы: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$. Какой силы изображен вектор момента...



- а) \vec{F}_1
- б) \vec{F}_2
- в) \vec{F}_3
- г) \vec{F}_4
- д) \vec{F}_5
- е) \vec{F}_6

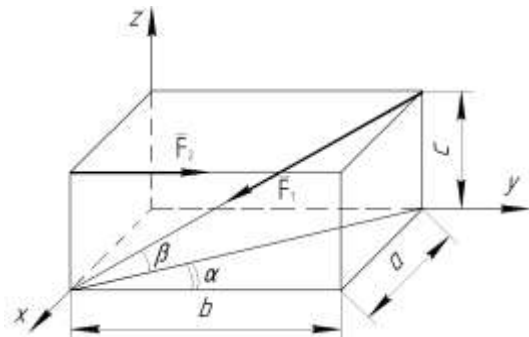
21. К вершинам куба приложены силы: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$. Какой силы изображен вектор момента относительно начала координат...



- а) \vec{F}_1
- б) \vec{F}_2
- в) \vec{F}_3
- г) \vec{F}_4
- д) \vec{F}_5
- е) \vec{F}_6

22. В вершинах прямоугольного параллелепипеда приложены силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , как указано на рисунке. Установите соответствия между проекциями главного момента \vec{M}_0 относительно центра O и выражениями в списке ответов:

1. M_{ox} , 2. M_{oy} , 3. M_{oz}



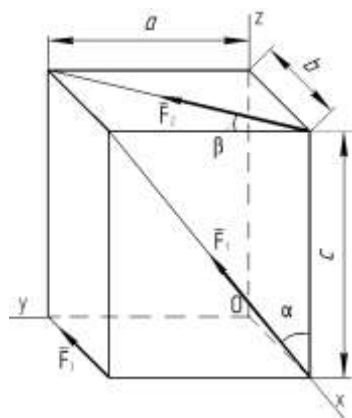
- $F_1 b \cos \beta \sin \alpha + F_2 \cdot a$

- $F_1 \cos \beta \sin \alpha$

- $F_2 \cdot c$

23. В вершинах прямоугольного параллелепипеда приложены силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , как указано на рисунке. Установите соответствие между проекциями на координатные оси главного момента M_0 и выражениями в списке ответов:

1. M_{ox} , 2. M_{oy} , 3. M_{oz}

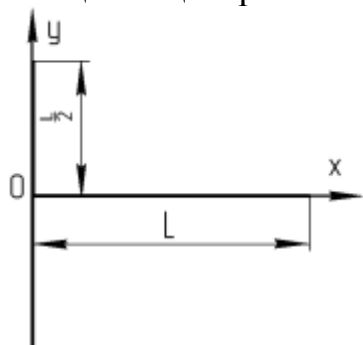


- $F_1 \cdot a \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot c \cdot \cos \beta$

- $F_1 \cdot b \cdot \sin \alpha$

- $F_1 \cdot b \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot c \cdot \sin \beta$

24. Два одинаковых однородных стержня длиной L соединены под прямым углом, как показано на рисунке. Абсцисса центра тяжести C полученной фигуры...



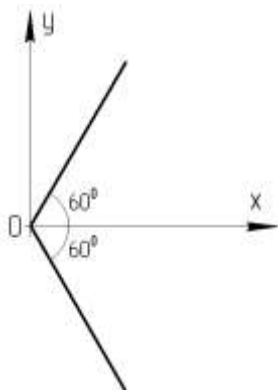
а) $X_c = \frac{L}{4}$

б) $X_c = \frac{L}{6}$

в) $X_c = \frac{L}{2}$

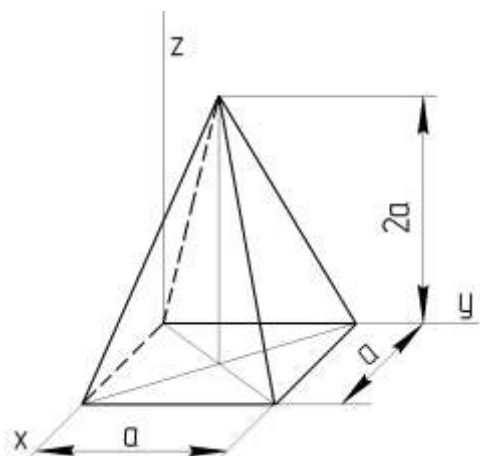
г) $X_c = \frac{L}{3}$

25. Два одинаковых однородных стержня длиной L соединены, как показано на рисунке. Абсцисса центра тяжести S полученной фигуры...



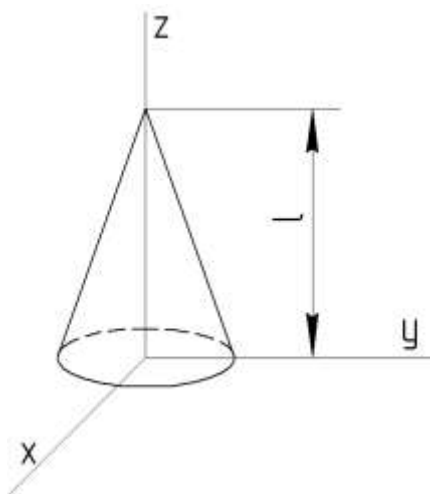
- а) $X_c = 0,25L$
- б) $X_c = 0,375L$
- в) $X_c = 0,5L$
- г) $X_c = 0,333L$

26. Координата Z_c тяжести неправильной пирамиды, показанной на рисунке, равна...



- а) $Z_c = a$
- б) $Z_c = 0,5a$
- в) $Z_c = \frac{2}{3}a$
- г) $Z_c = \frac{3}{2}a$
- д) $Z_c = 0,33a$

27. Координата Z_c центра тяжести конуса, показанного на рисунке, равна...



- а) $Z_c = \frac{l}{2}$
- б) $Z_c = \frac{l}{3}$
- в) $Z_c = \frac{l}{4}$
- г) $Z_c = \frac{2}{3}l$

28. Единицей измерения коэффициента трения скольжения является...

а) сантиметр,

б) $\frac{H}{M}$,

в) $H \cdot m$,

г) величина безразмерная

29. Коэффициент трения качения измеряется...

а) Н - ньютонах,

б) кг - килограммах,

в) единицах длины,

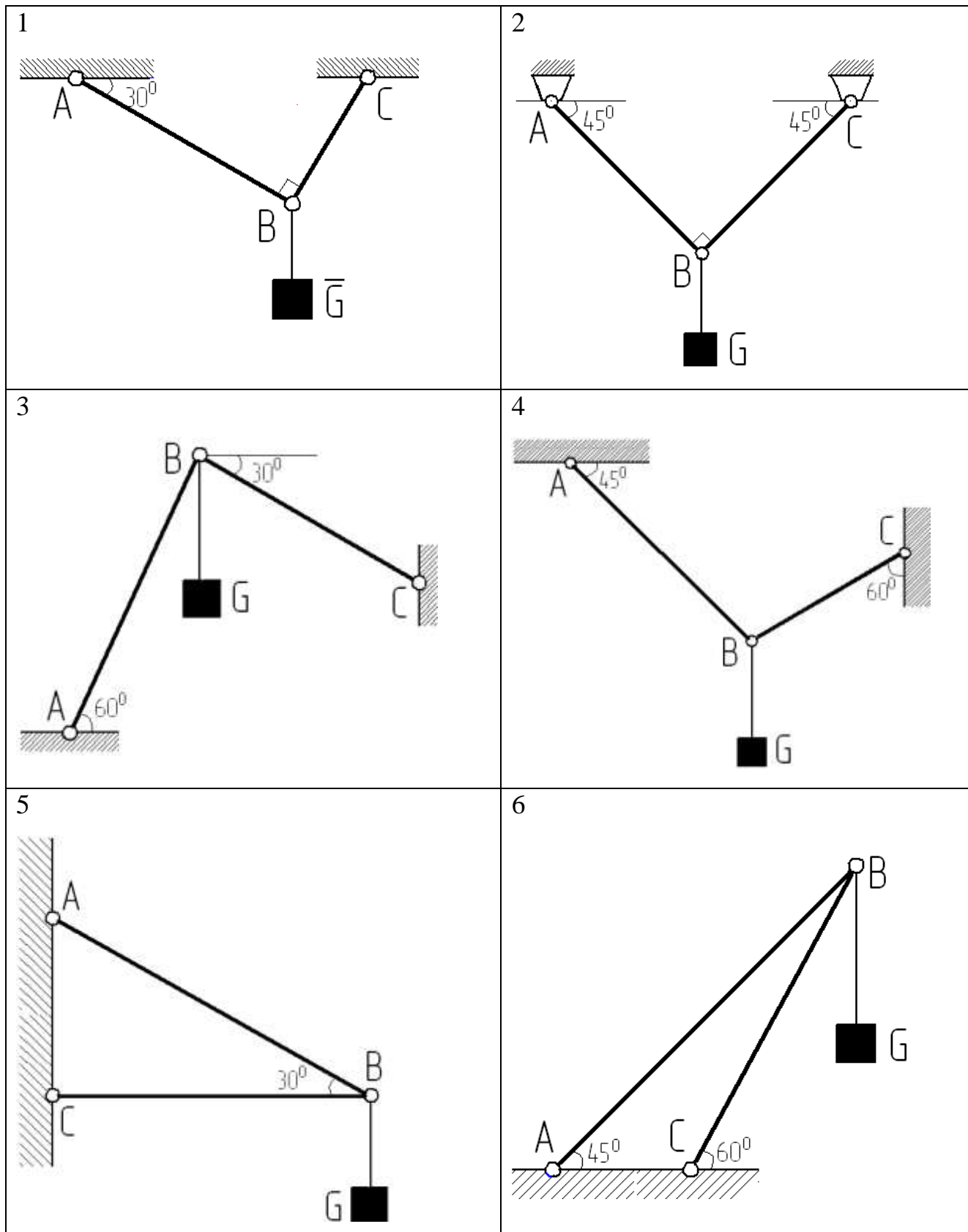
г) величина безразмерная

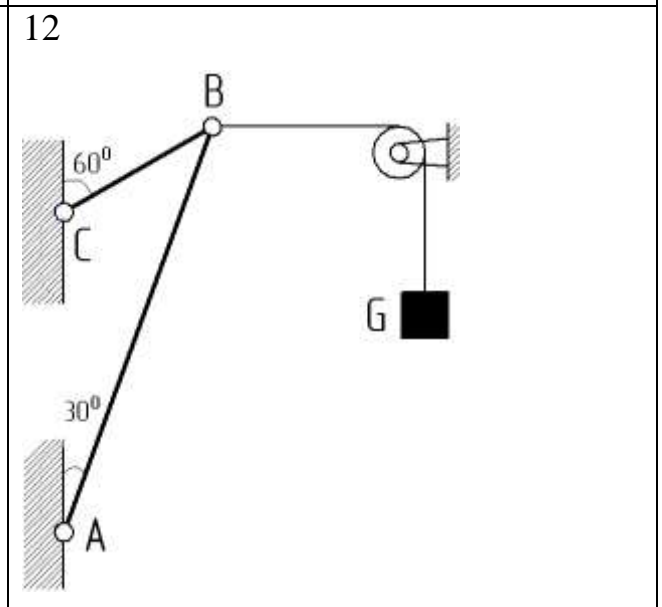
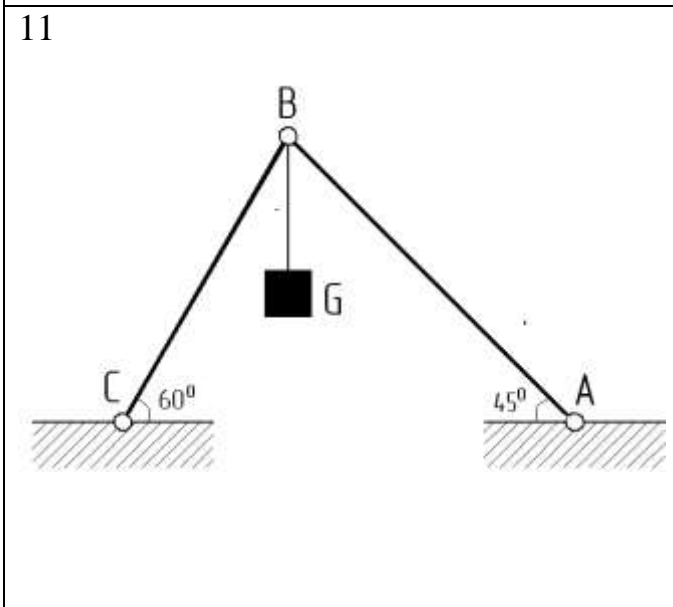
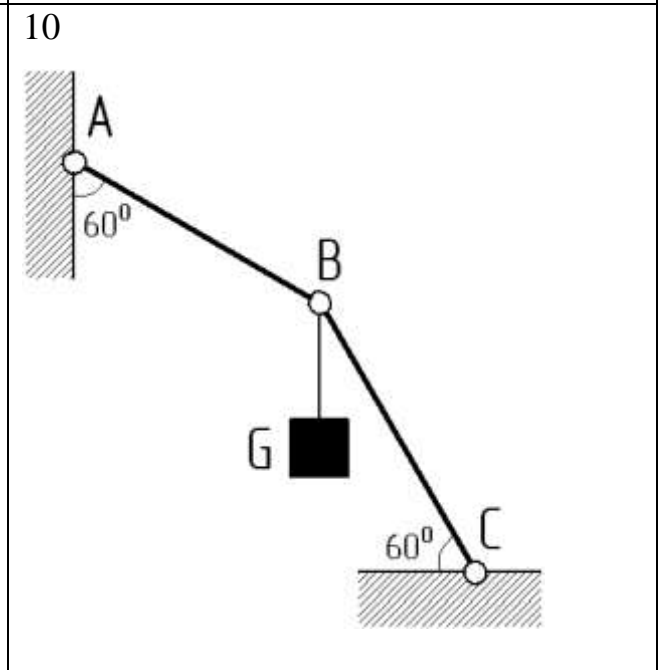
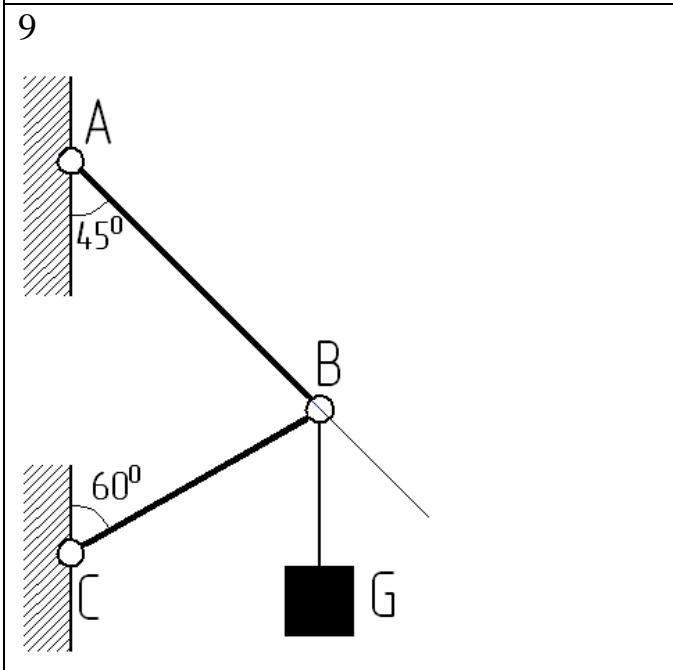
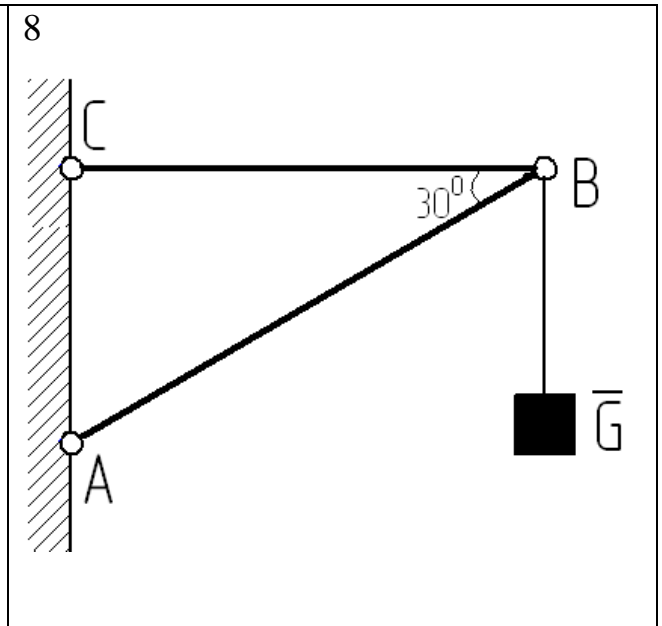
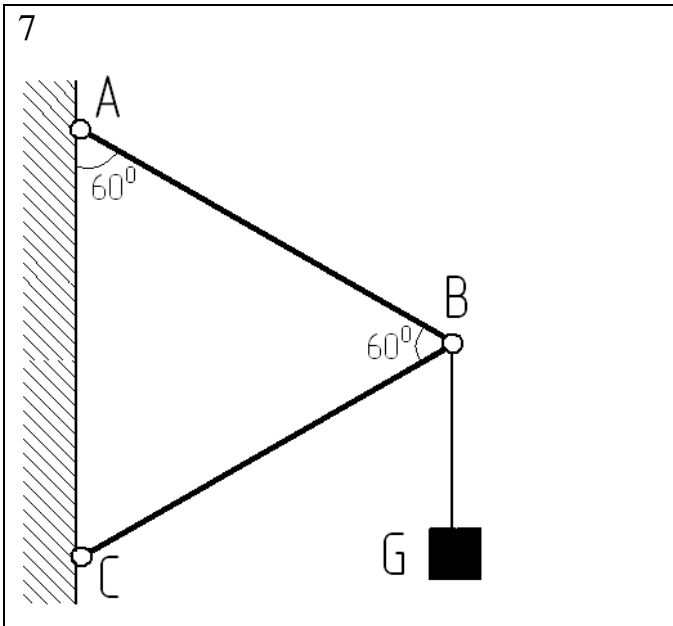
Глава XI

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

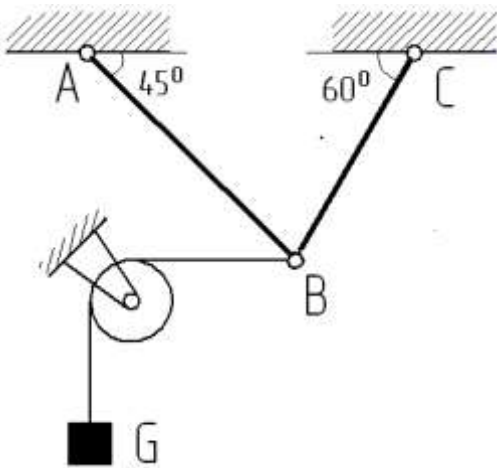
С-1. Система сходящихся сил

Найти реакции опор, если вес груза G равен 1000 Н.

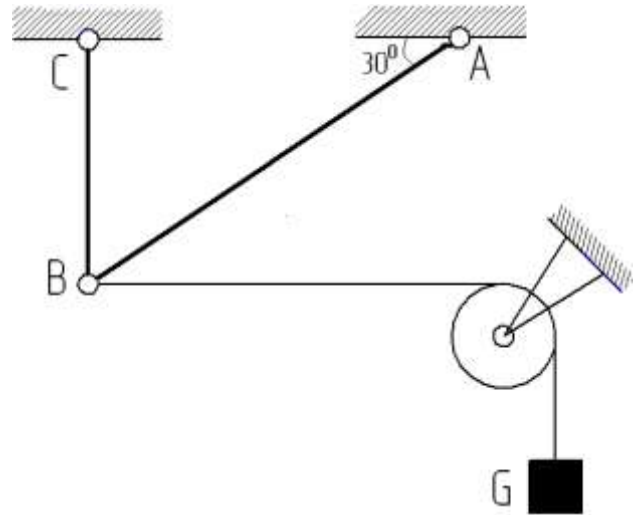




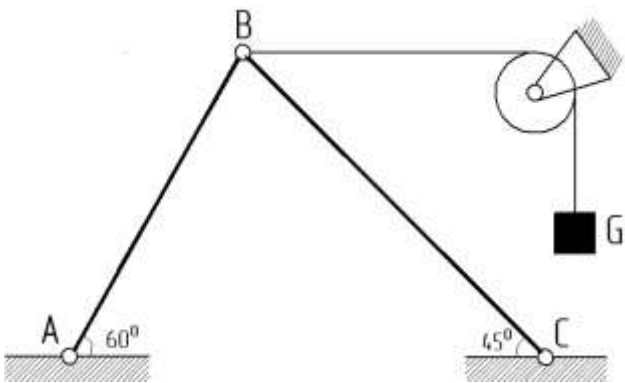
13



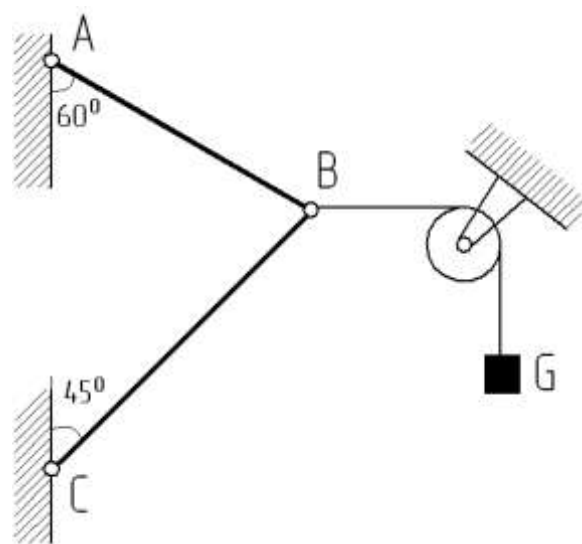
14



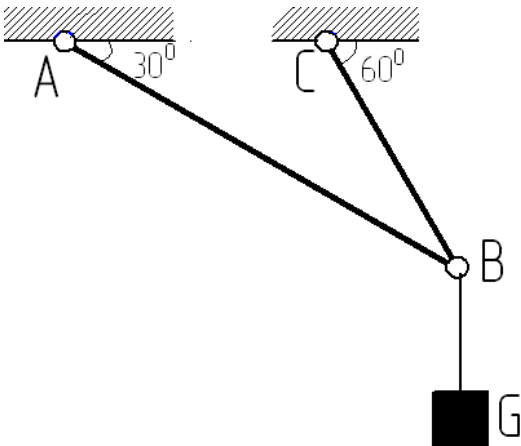
15



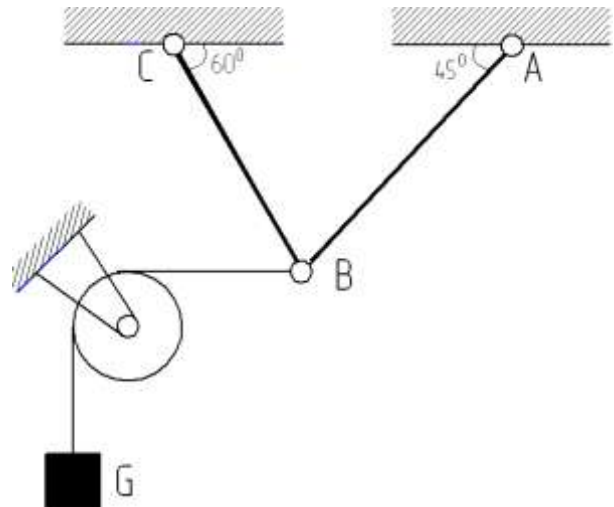
16



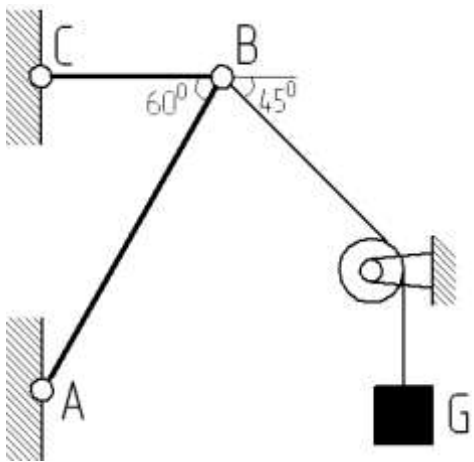
17



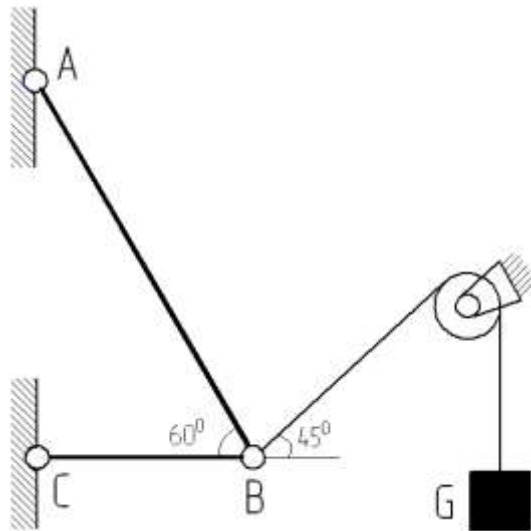
18



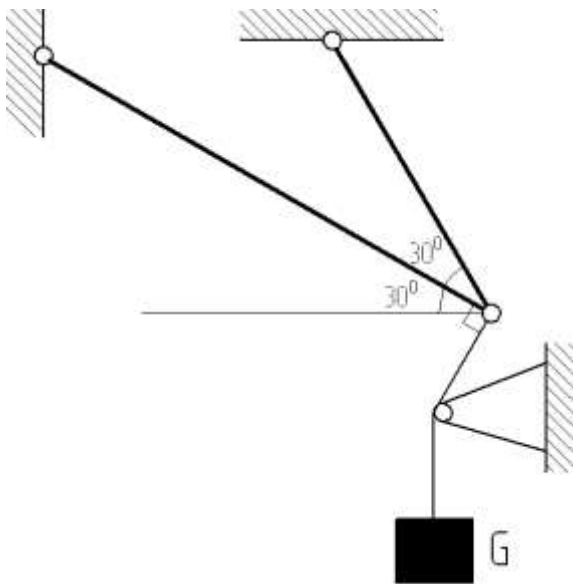
19



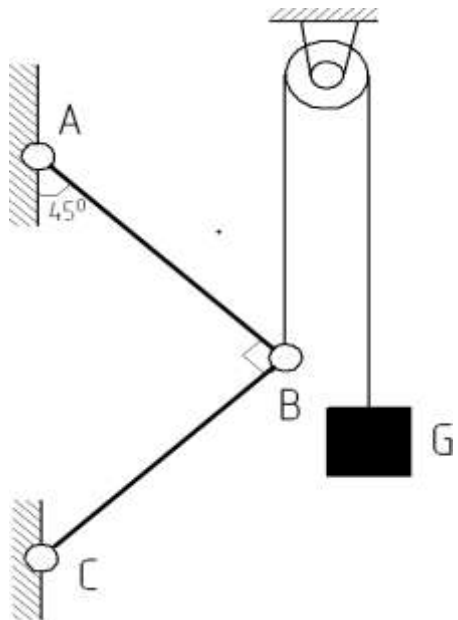
20



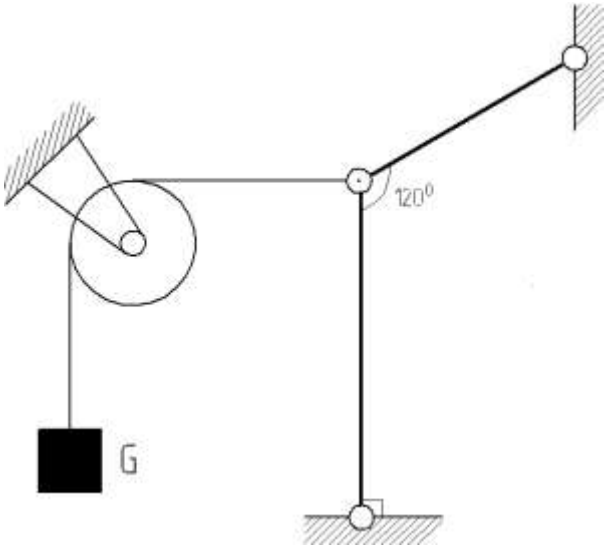
21



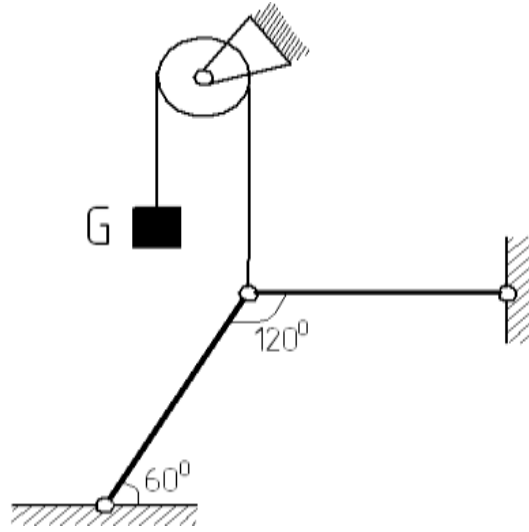
22



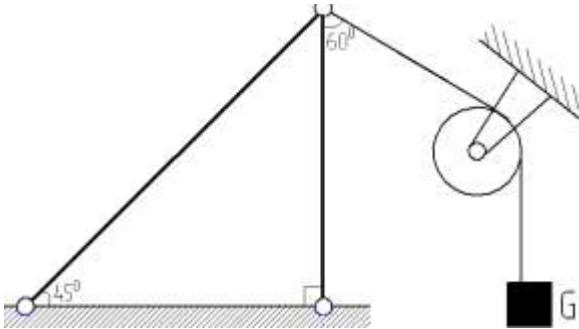
23



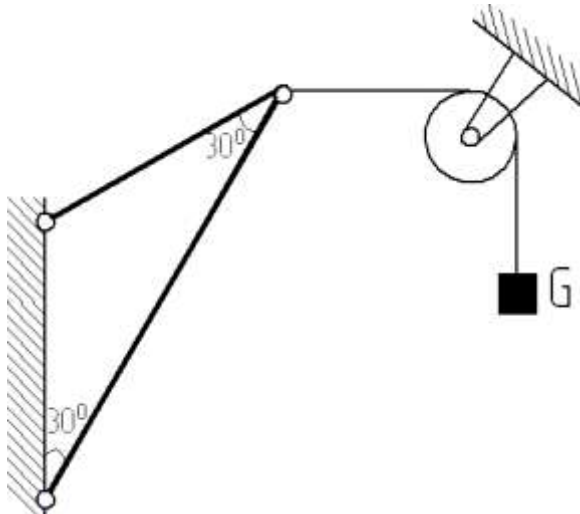
24



25



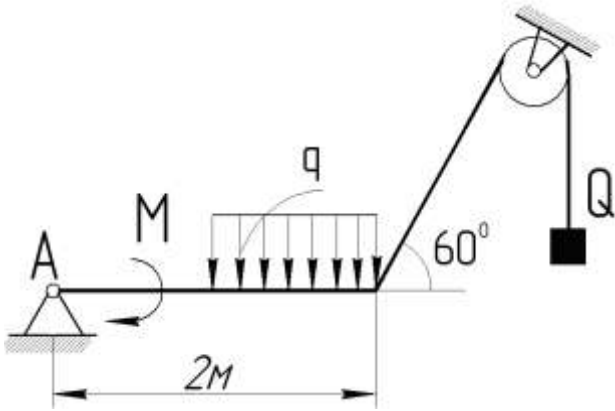
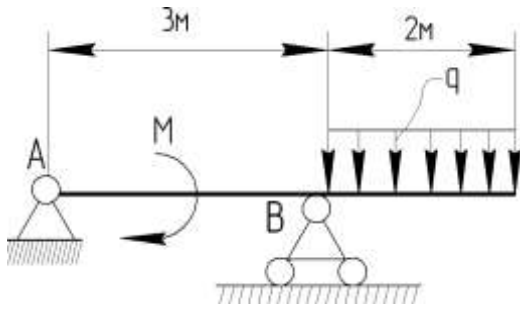
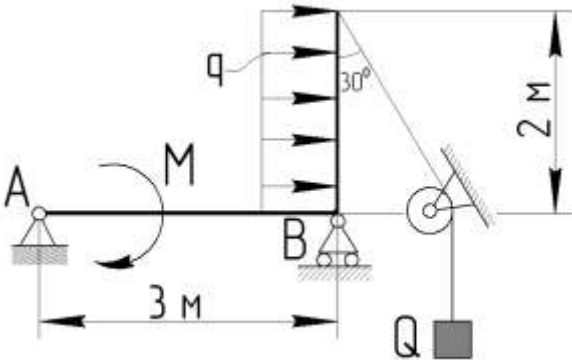
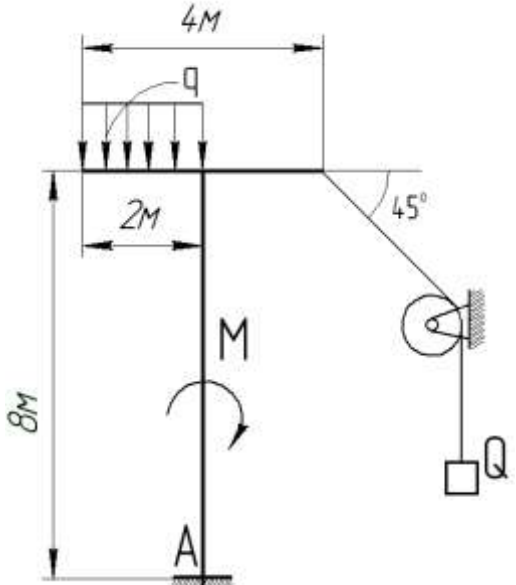
26

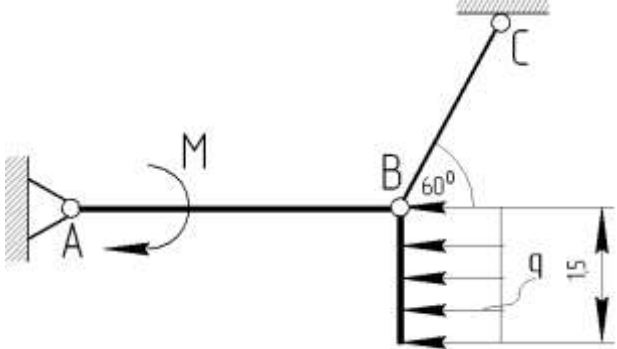
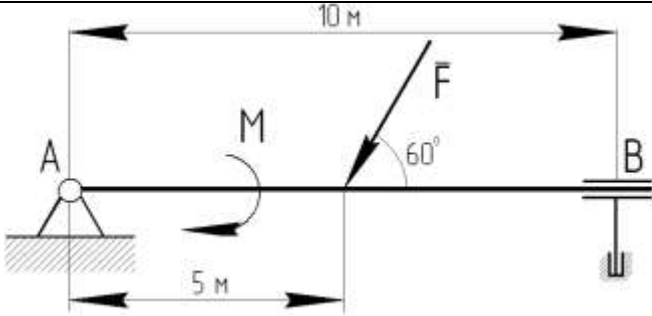
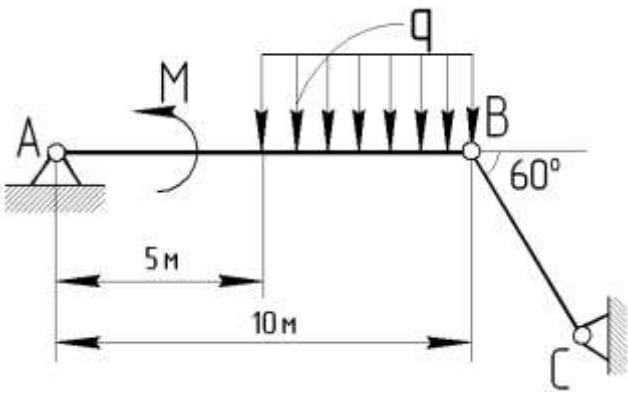
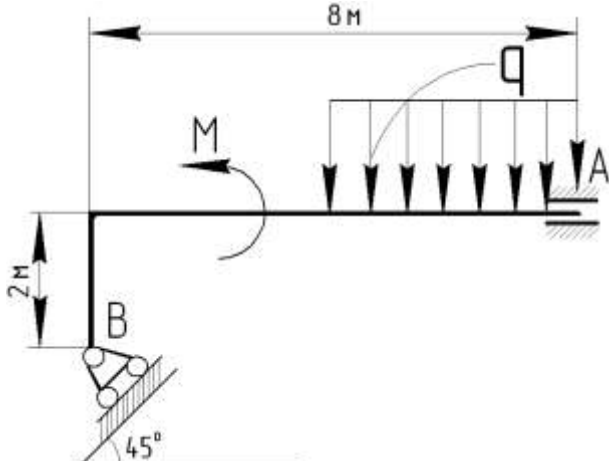


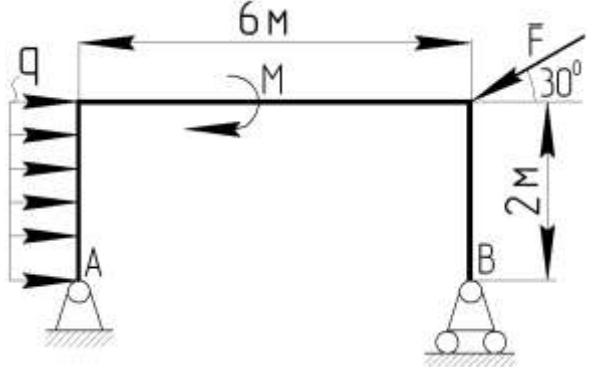
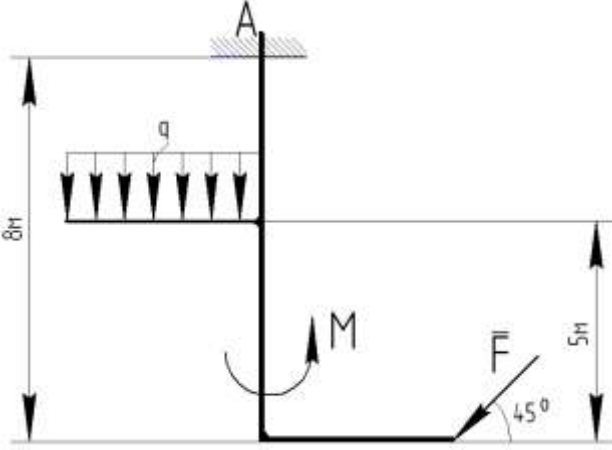
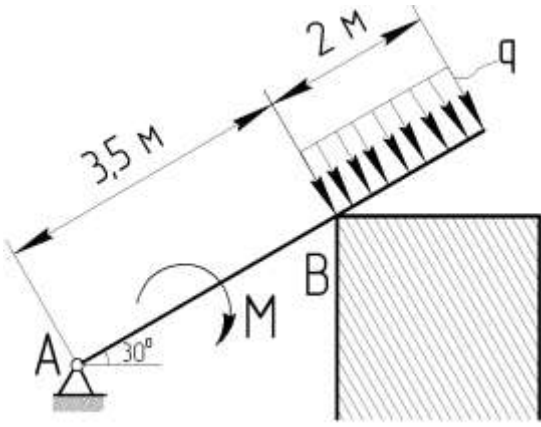
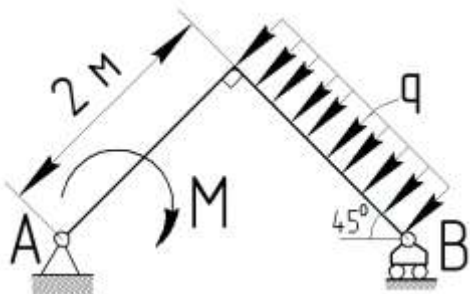
С-2. Произвольная плоская система сил

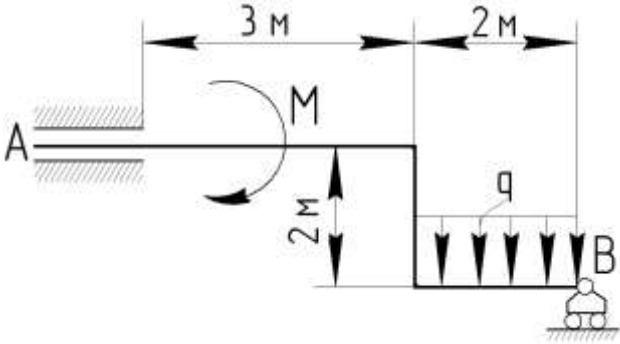
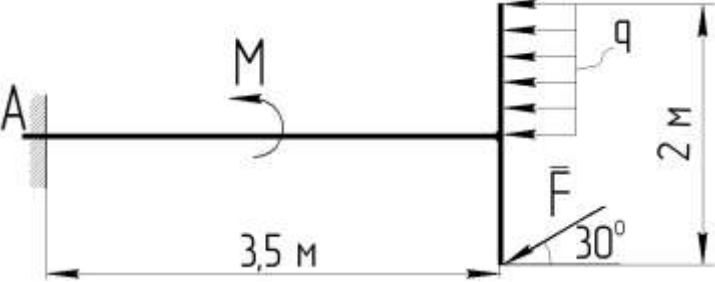
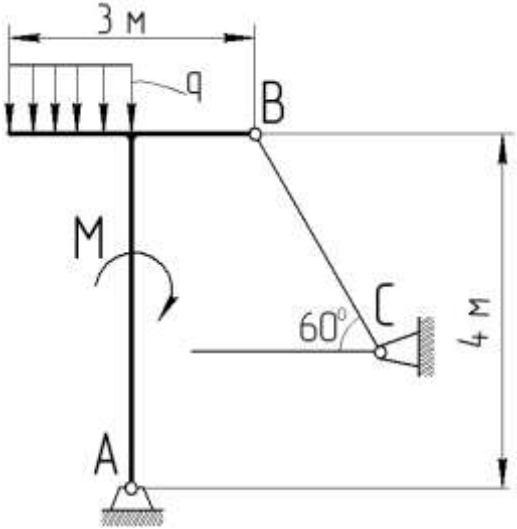
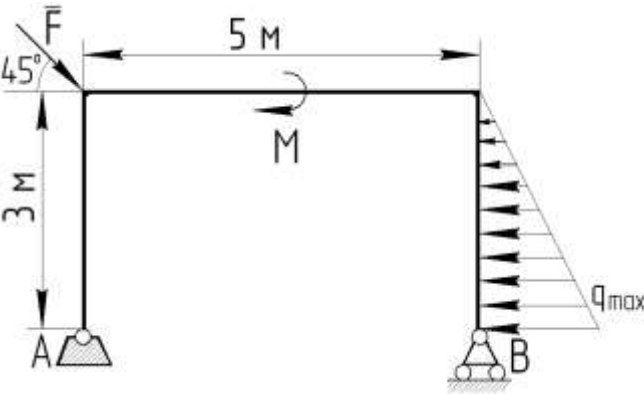
Определить реакцию опор

<p>1.</p> <p>$F = 10 \text{ кН}$</p> <p>$M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p>	
<p>2.</p> <p>$F = 4 \text{ кН}$</p> <p>$M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p>	
<p>3.</p> <p>$F = 7 \text{ кН}$</p> <p>$M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p>	
<p>4.</p> <p>$M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q_{\text{max}} = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p>	

<p>5.</p> <p>Определить реакцию опоры A и вес груза Q, если $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> $q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	
<p>6.</p> <p>$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> $q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ <p>Определить реакции опор A и B</p>	
<p>7.</p> $q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ <p>$M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>$Q = 1 \text{ кН}$</p> <p>Определить реакции опор A и B</p>	
<p>8.</p> <p>$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>$Q = 2 \text{ кН}$</p> $q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ <p>Определить реакции опоры A</p>	

<p>9.</p> $q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ <p>Определит реакции опоры <i>A</i> и стержня <i>BC</i></p>	
<p>10.</p> $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ $F = 7 \text{ кН}$ <p>Определит реакции опор <i>A</i> и <i>B</i></p>	
<p>11.</p> $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ $q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ <p>Определит реакции опор</p>	
<p>12.</p> $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ $q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ <p>Определит реакции опор <i>A</i> и <i>B</i></p>	

<p>13.</p> <p>$M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$F = 3 \text{ кН}$</p> <p>$q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Найти реакции опор A и B</p>	
<p>14.</p> <p>$M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$F = 2 \text{ кН}$</p> <p>$q = 5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Найти реакции заделки A</p>	
<p>15.</p> <p>$M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Определить реакции опор A и B</p>	
<p>16.</p> <p>$M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$</p> <p>$q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Определить реакции опор A и B</p>	

<p>17.</p> <p>$M = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>$q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Определить реакции опор A и B</p>	
<p>18.</p> <p>$M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>$F = 3 \text{ кН}$</p> <p>$q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Определить реакции заделки A</p>	
<p>19.</p> <p>$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>$q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>Определить реакции опоры A и стержня BC</p>	
<p>20.</p> <p>$F = 4 \text{ кН}$</p> <p>$q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$</p> <p>$M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p> <p>Определить реакции опор A и B</p>	

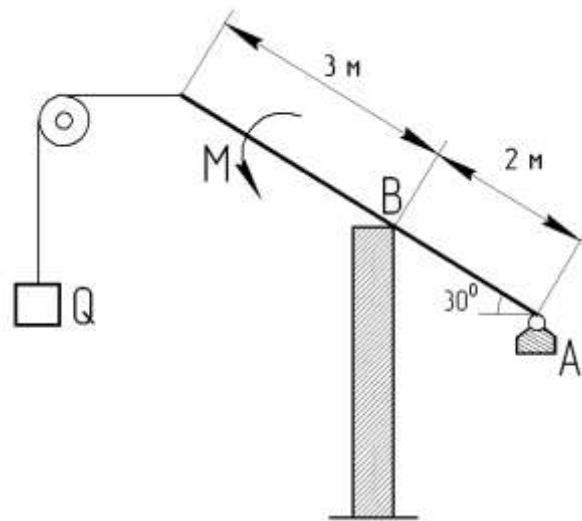
21.

$$Q = 6 \text{ кН}$$

$$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определить реакции опор

A и *B*



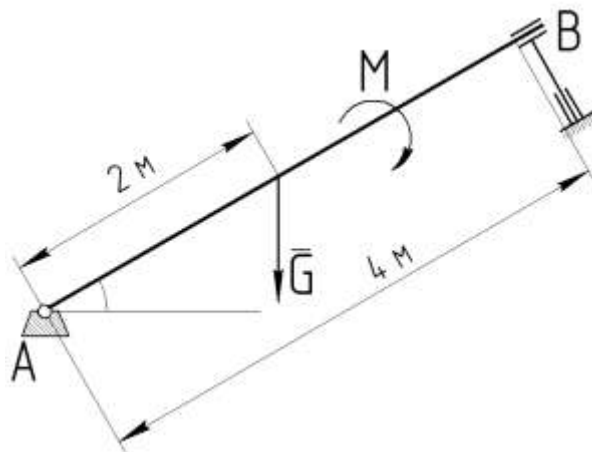
22.

$$G = 10 \text{ кН}$$

$$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определить реакции опор

A и *B*



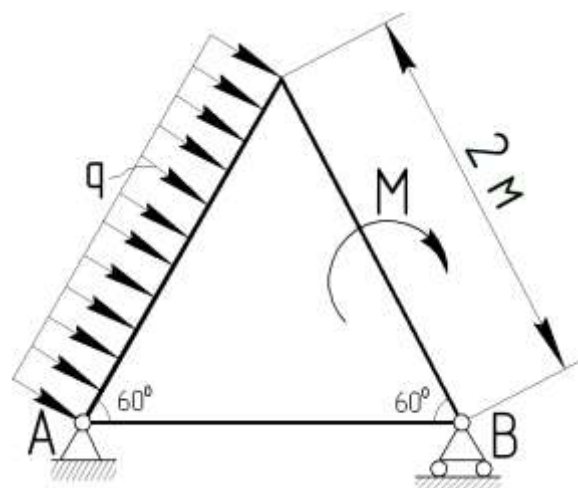
23.

$$q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определить реакции опор

A и *B*



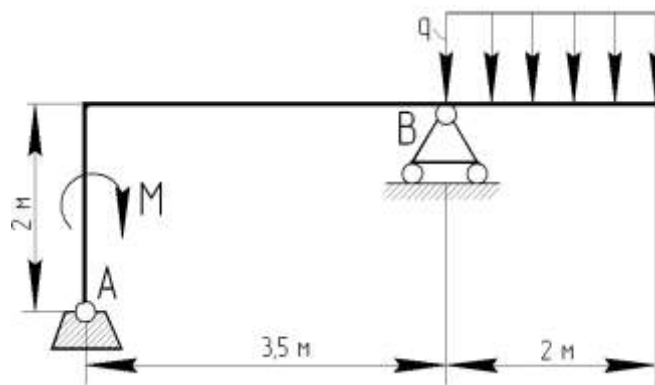
24.

$$q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определить реакции опор

A и *B*



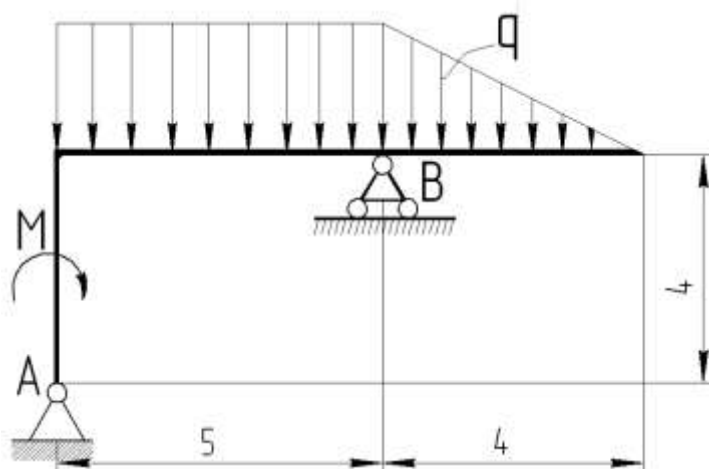
25.

$$q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определить реакции опор

A и *B*

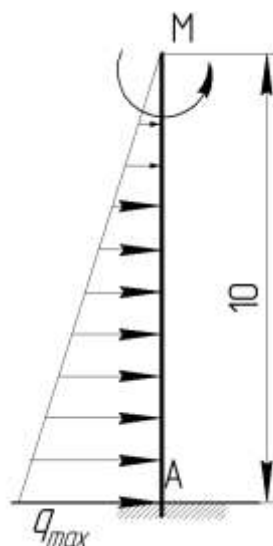


26.

Определить реакции опоры *A*

$$M = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

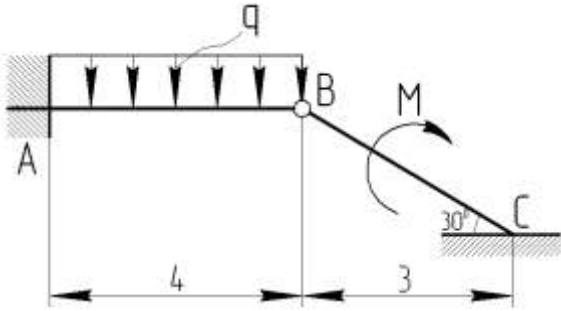
$$q_{\max} = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$



С-3. Плоская система сил (система двух тел)

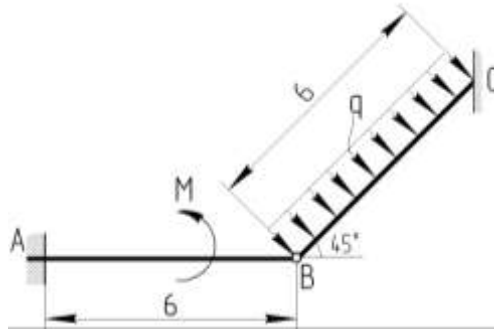
Найти реакции опор. Размеры указаны в метрах. Весом элементов конструкции пренебречь.

1.



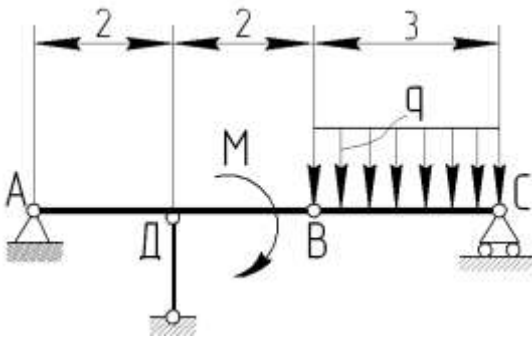
$$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

2.



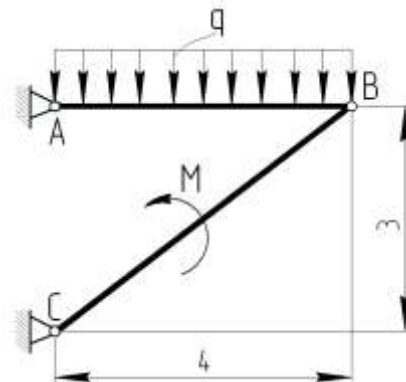
$$M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

3.



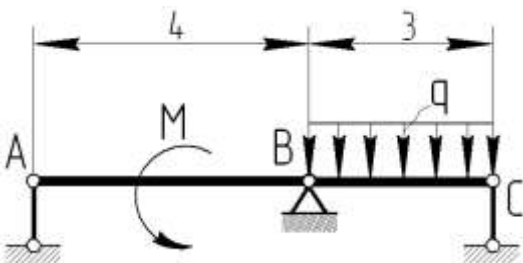
$$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

4.



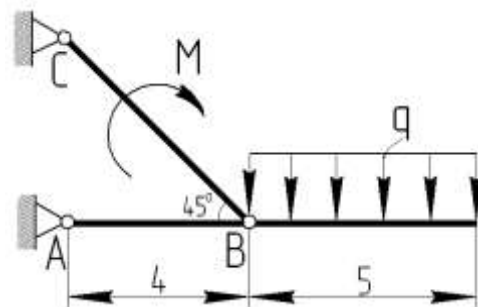
$$M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

5.



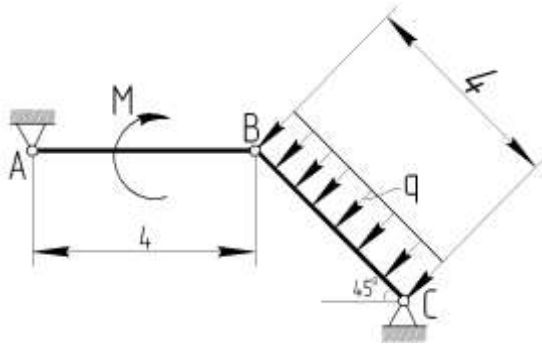
$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

6.



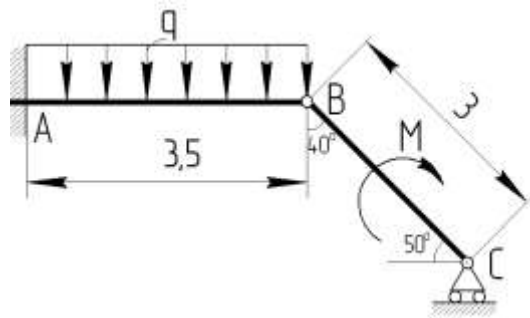
$$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

7.



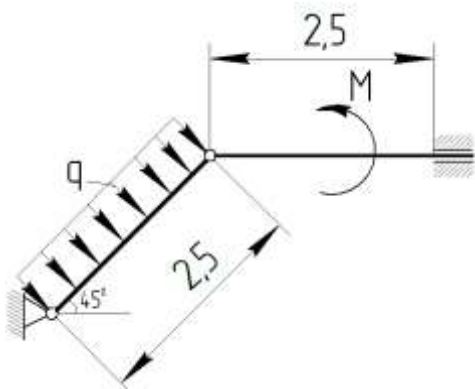
$$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

8.



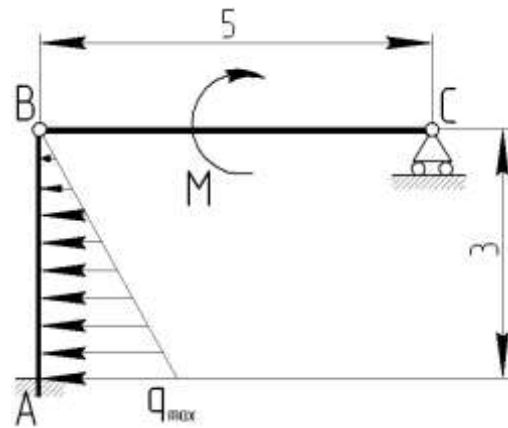
$$M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

9.



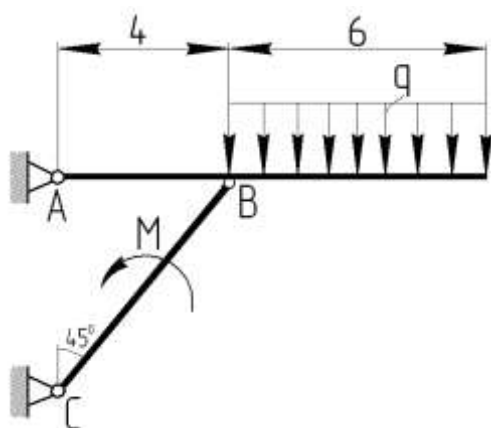
$$M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

10.



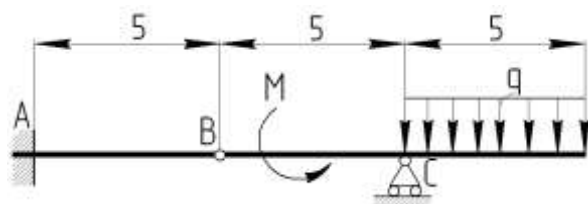
$$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q_{\max} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

11.



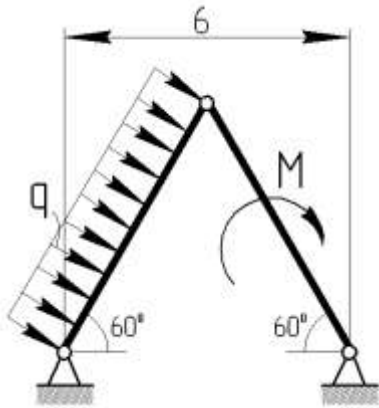
$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

12.



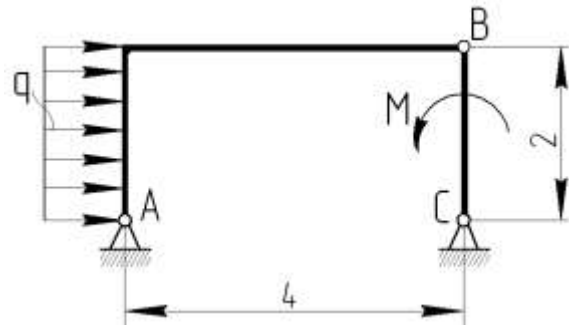
$$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

13.



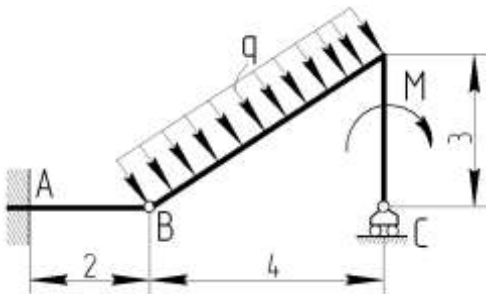
$$M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

14.



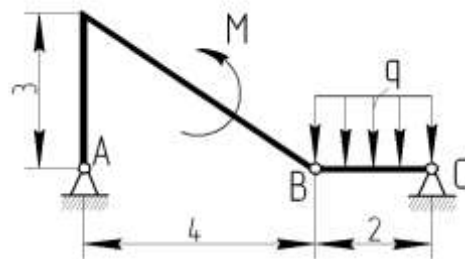
$$M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

15.



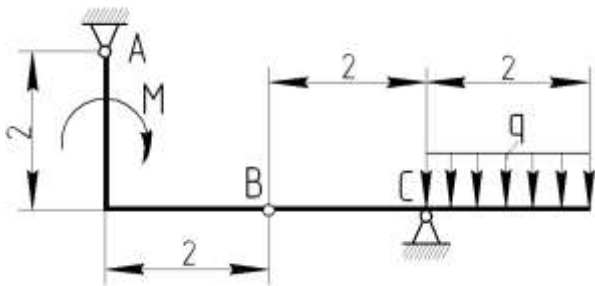
$$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

16.



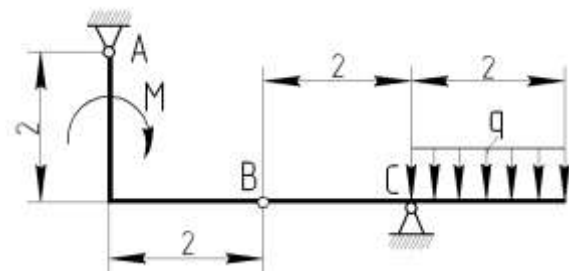
$$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

17.



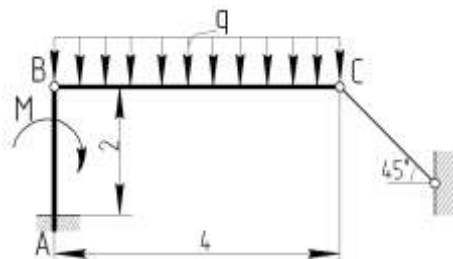
$$M = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

18.



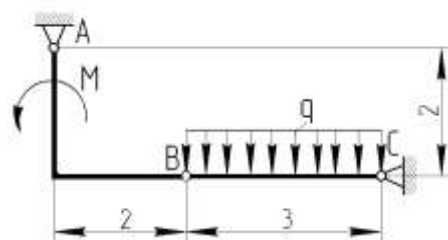
$$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

19.



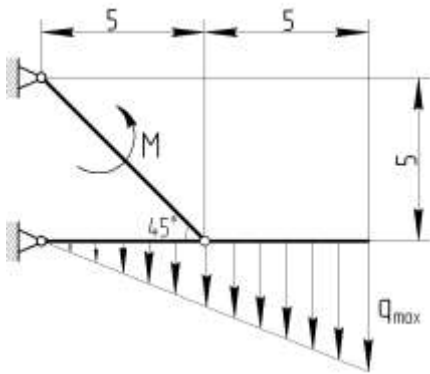
$$M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

20.



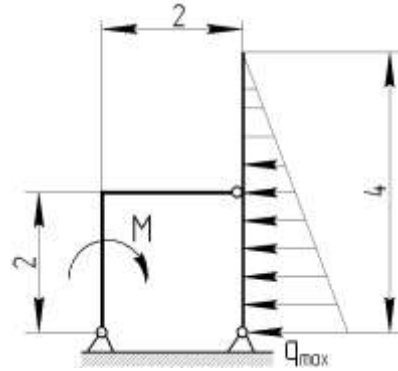
$$M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

21.



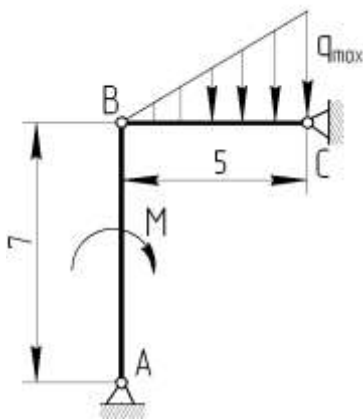
$$M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; q_{\max} = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

22.



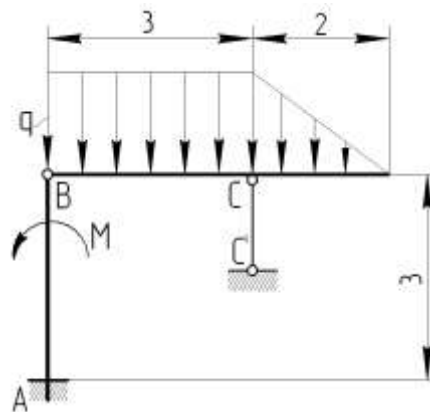
$$M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; q = 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

23.



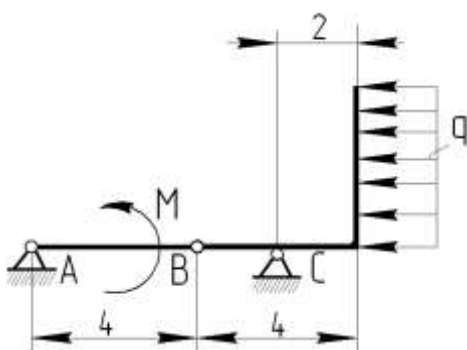
$$M = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}; q_{\max} = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

24.



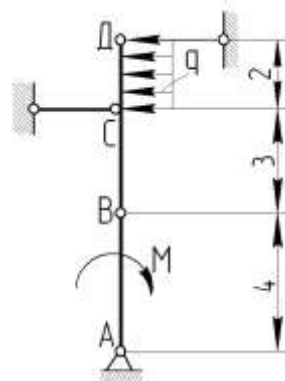
$$M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

25.



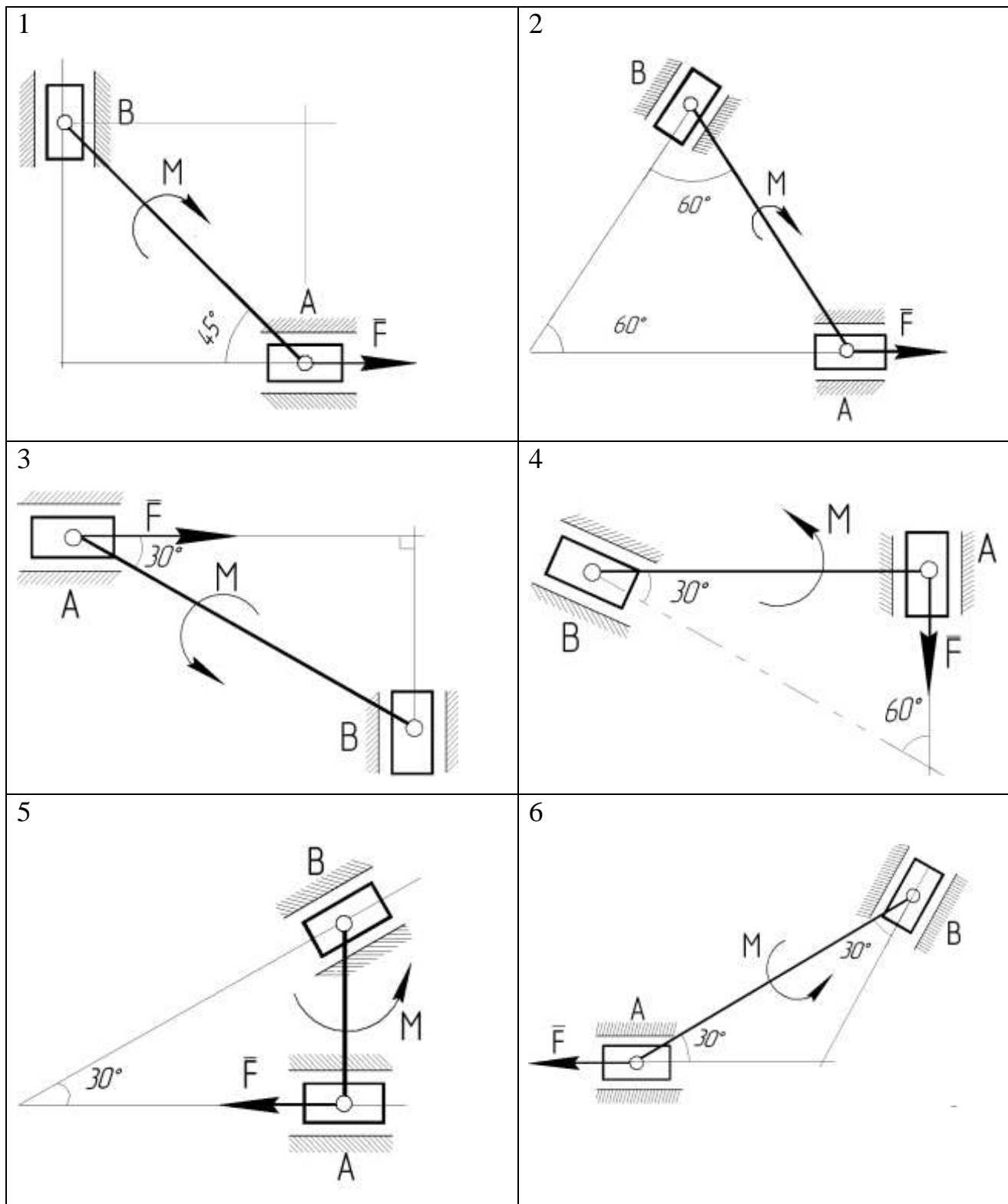
$$M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}; q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

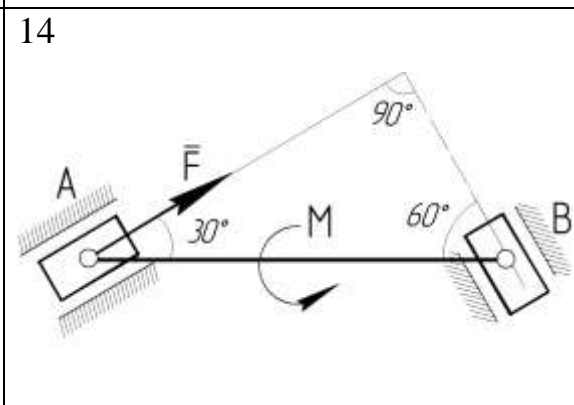
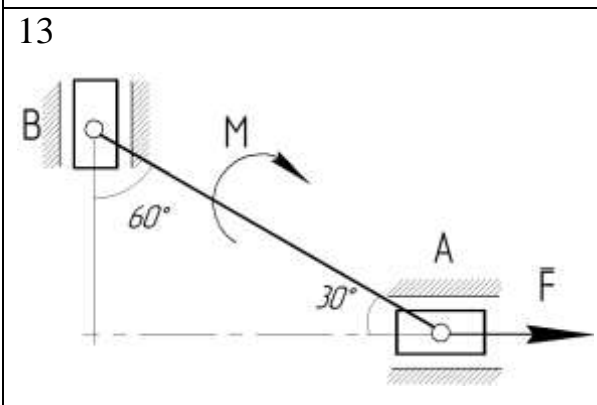
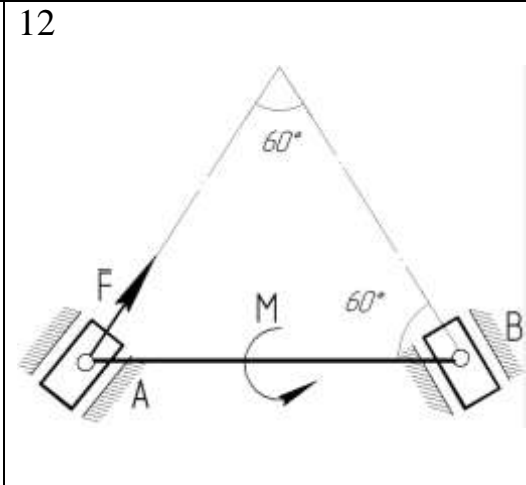
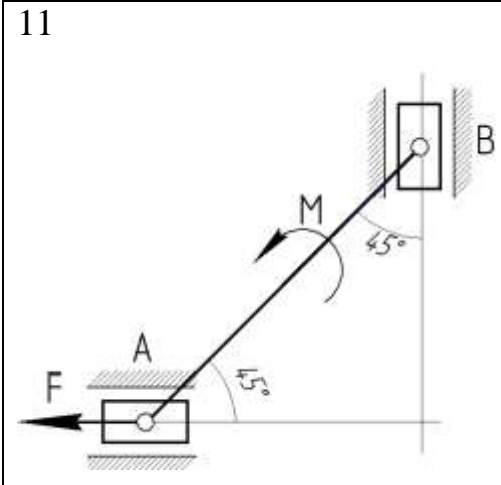
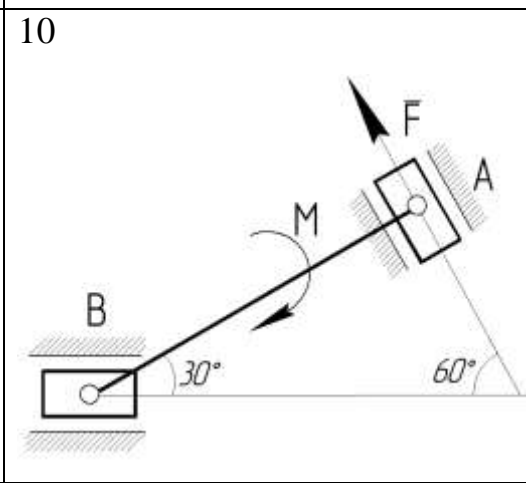
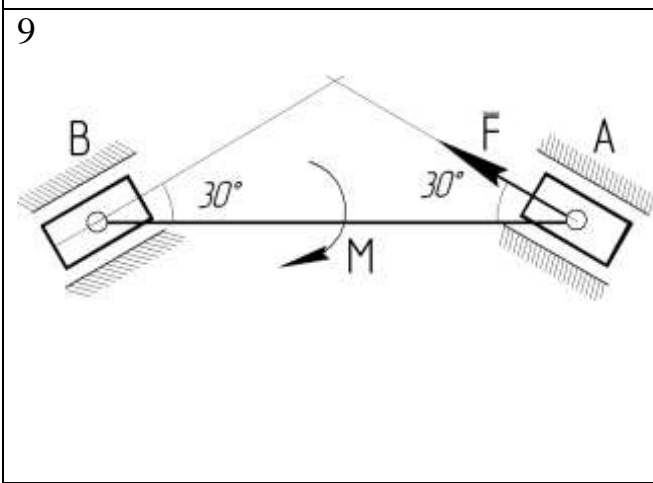
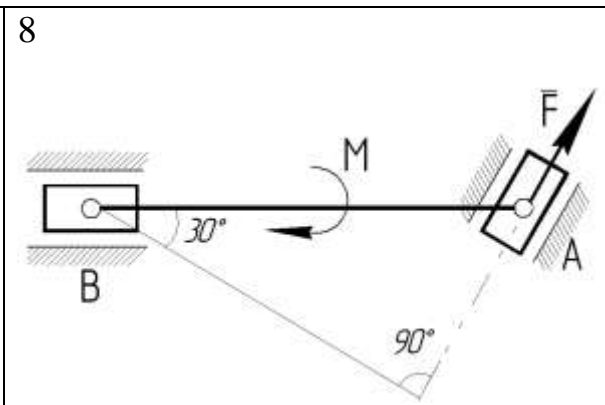
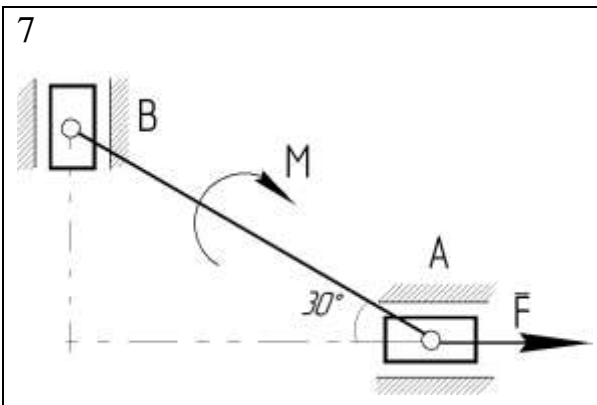
26.



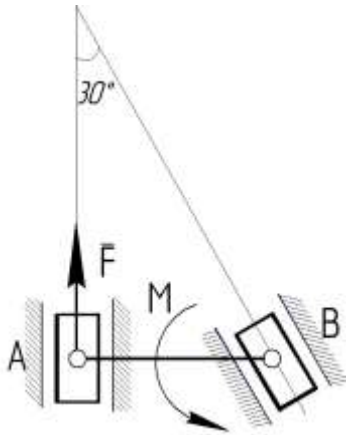
С-4. Система сил при наличии трения

Найти значение силы трения F ползуна A , если трение у ползуна B отсутствует, а коэффициент трения у ползуна A по направляющей равен $f = 0,3$. Длина стержня AB равна 2 м, а его вес $P = 1200$ Н. Пара сил, приложенная к стержню, имеет момент $M = 1000$ Н·м. Размерами ползунков пренебречь.

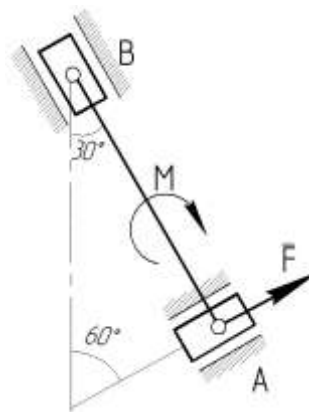




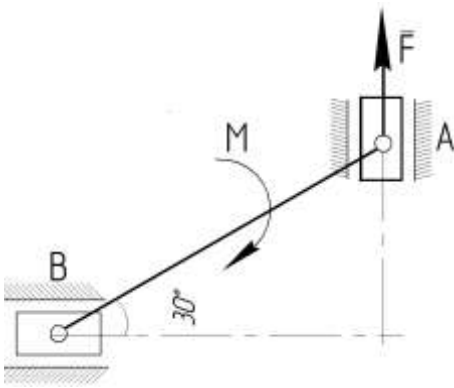
15



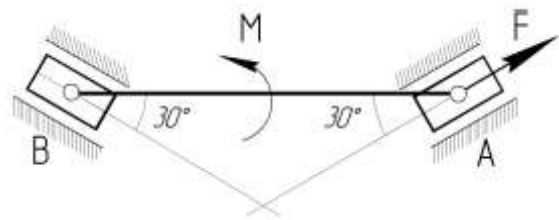
16



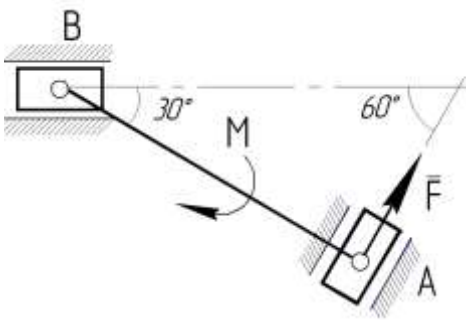
17



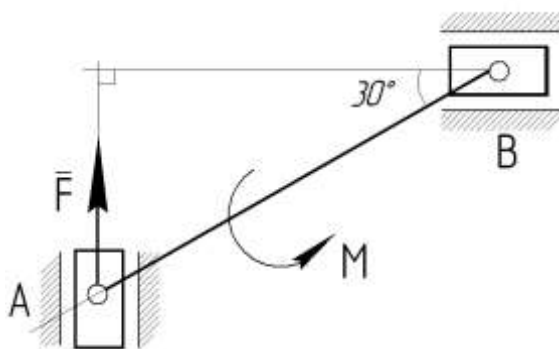
18



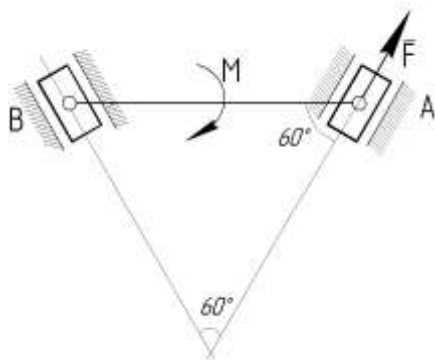
19



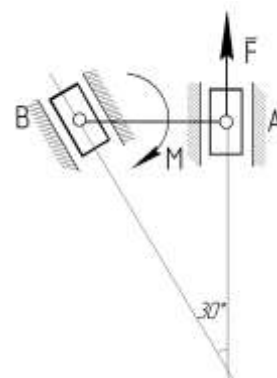
20



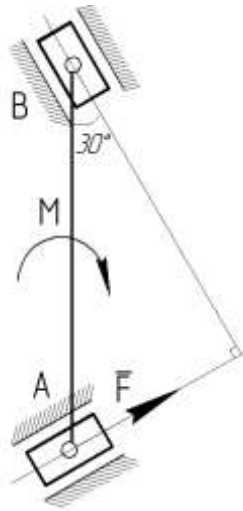
21



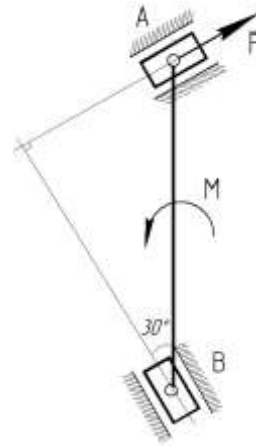
22



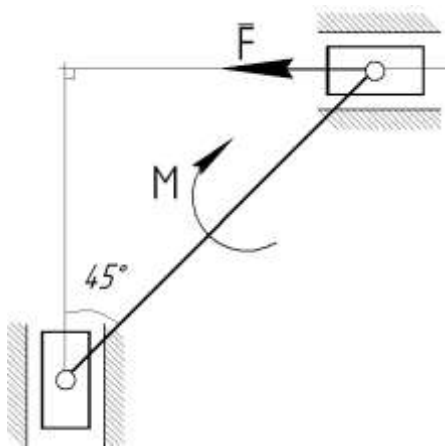
23



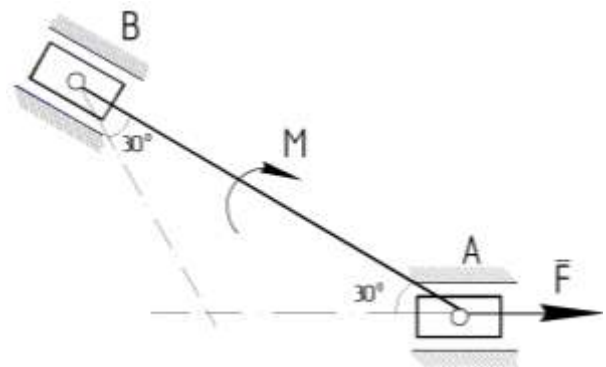
24



25

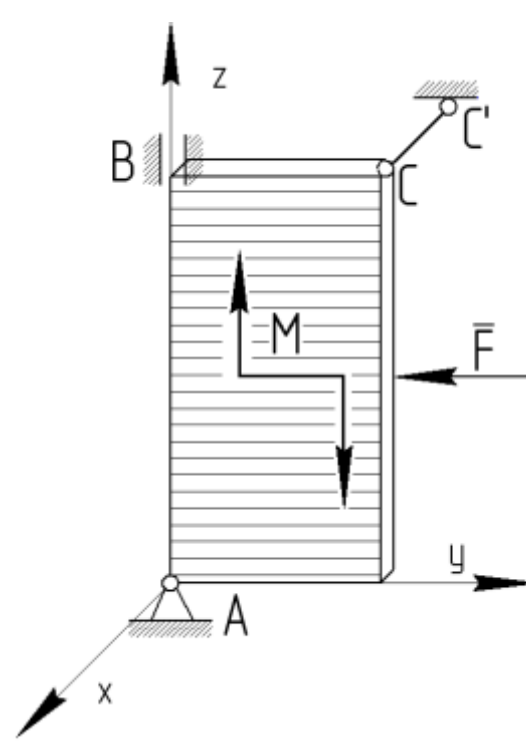
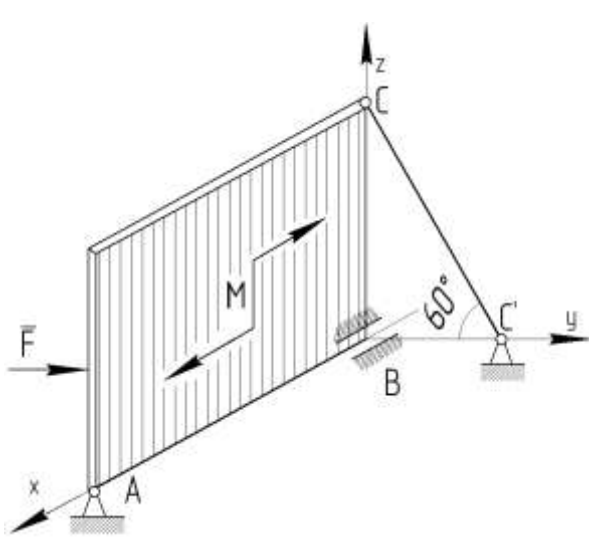
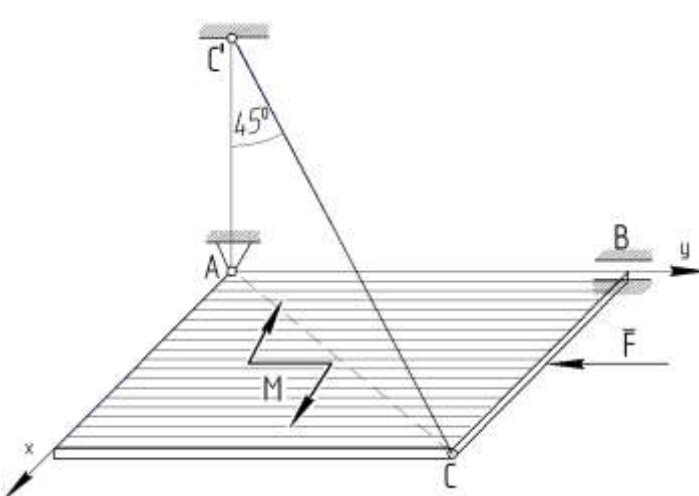
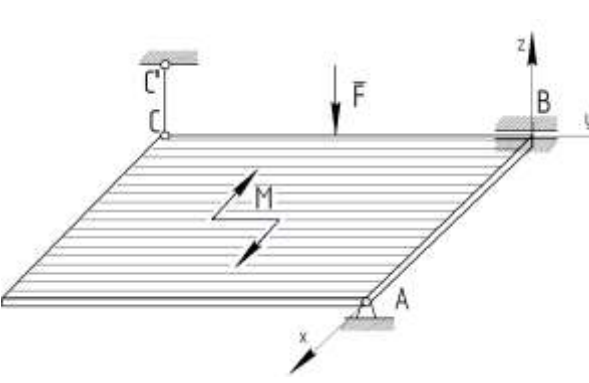


26

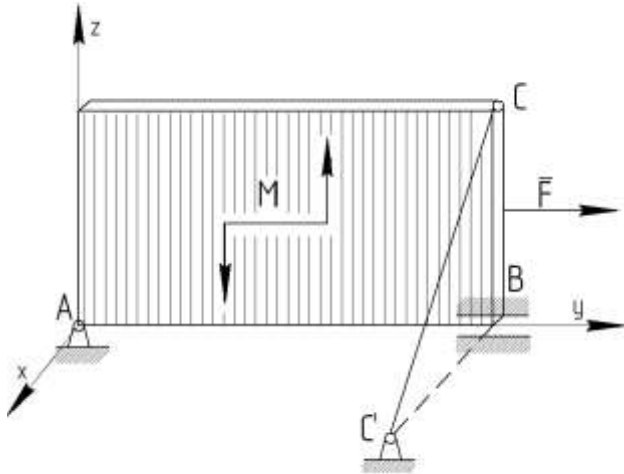


С – 5. Пространственная система сил

Определить реакции опор однородной плиты, имеющую размеры $AB = 4$ м и $BC = 2$ м. Вес плиты $P = 6$ кН. На нее действует пара сил с моментом $M = 4$ кН·м и сила \bar{F} , приложенная в середине соответствующей стороны. модуль которой $F = 8$ кН. Плита имеет три опоры: сферический в точке A , цилиндрический в точке B и тонкий стержень в точке C .

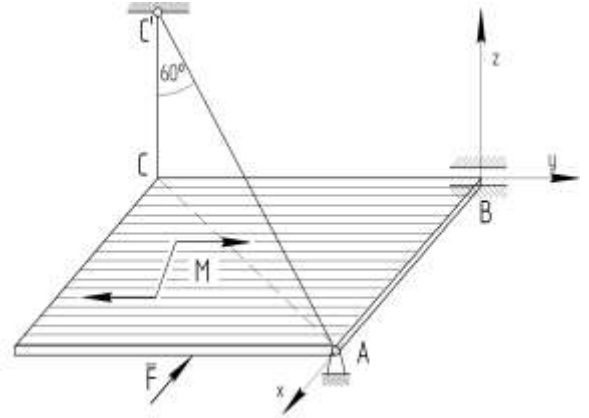
<p>1.</p>  <p style="text-align: center;">$CC' \parallel A_x, F \parallel A_y$</p>	<p>2.</p>  <p style="text-align: center;">$\bar{F} \parallel B_y$</p>
<p>3.</p>  <p style="text-align: center;">$\bar{F} \parallel A_y$</p>	<p>4.</p>  <p style="text-align: center;">$\bar{F} \parallel B_z$</p>

5.



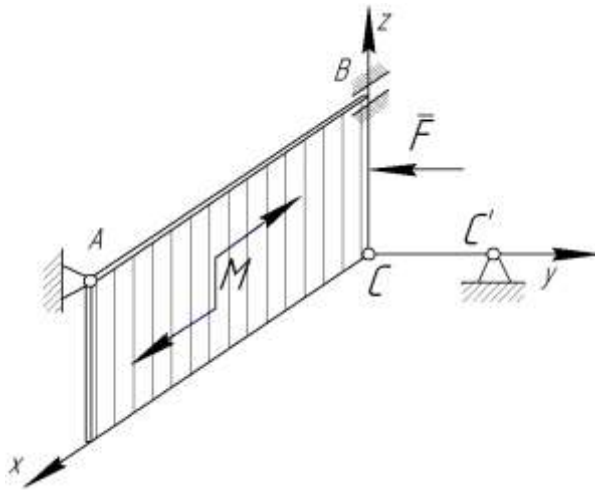
$\bar{F} \parallel A_y$

6.



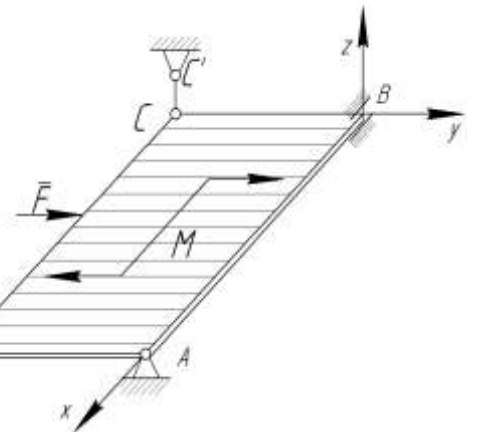
$\bar{F} \parallel B_x$

7.



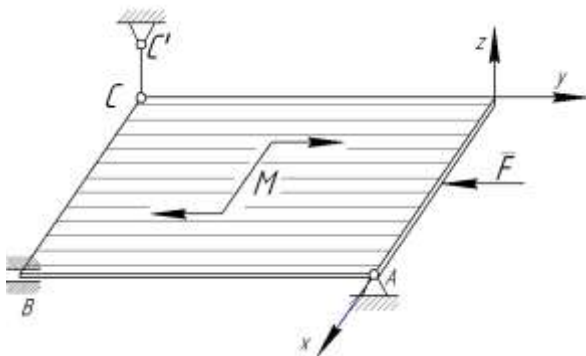
$\bar{F} \parallel C_y$

8.



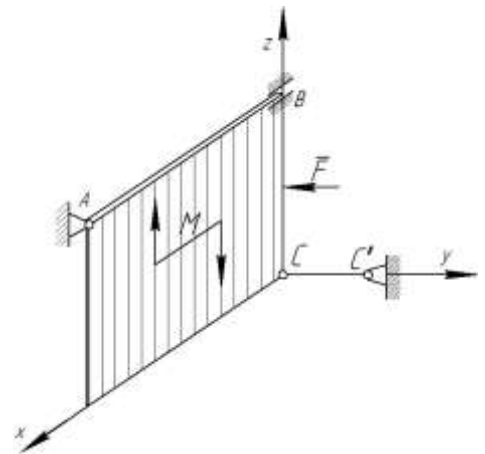
$\bar{F} \parallel B_y$

9.



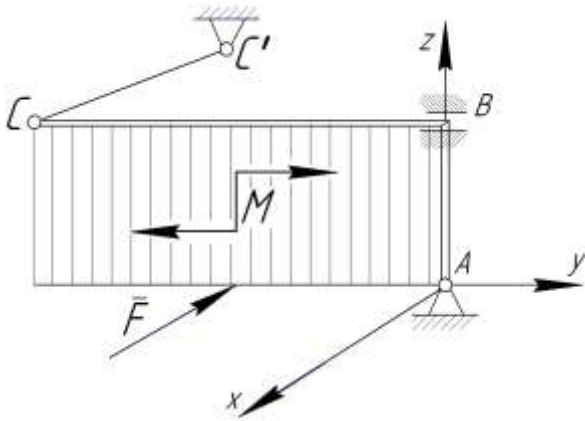
$\bar{F} \parallel C_y$

10.



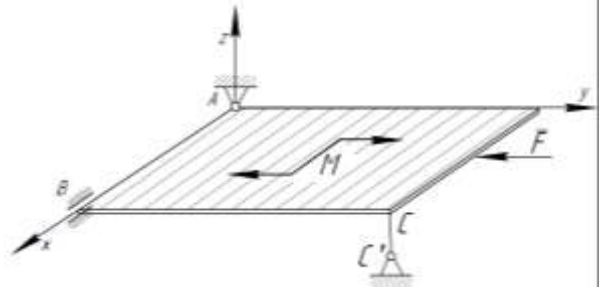
$\bar{F} \parallel C_y$

11.



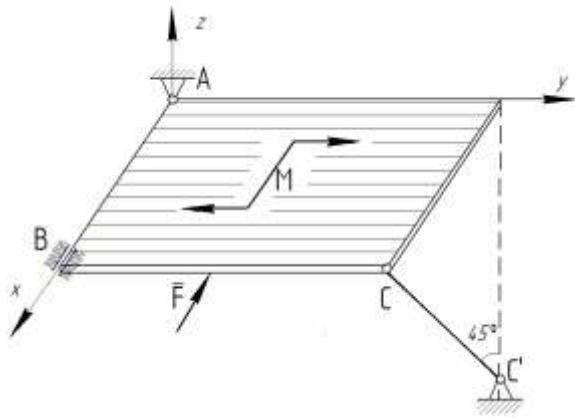
$CC' \parallel A_x, \bar{F} \parallel A_x$

12.



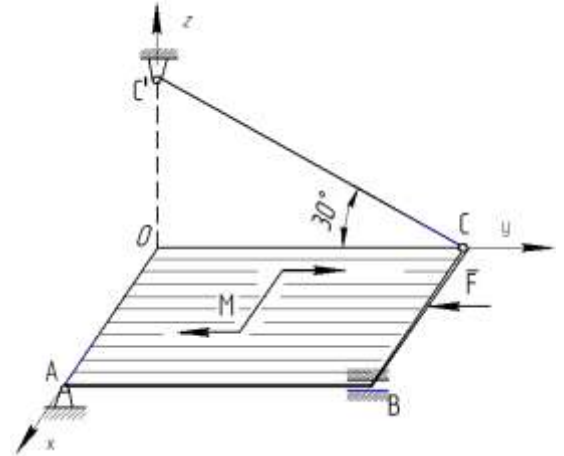
$\bar{F} \parallel A_y$
 $CC' \parallel A_z$

13.



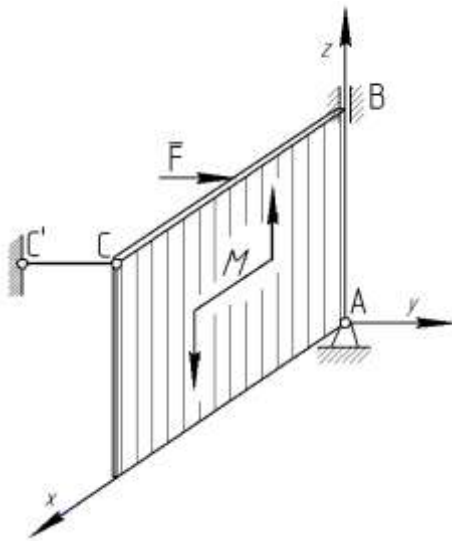
$\bar{F} \parallel A_x$

14.



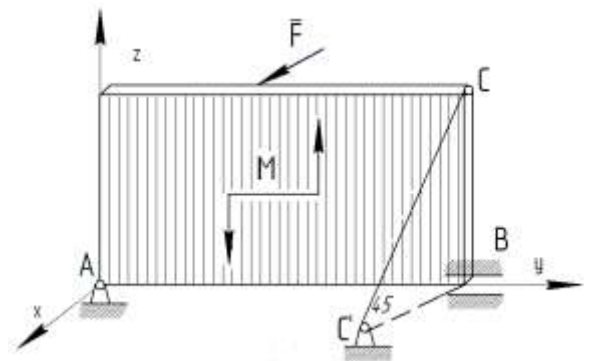
$\bar{F} \parallel O_y$

15.



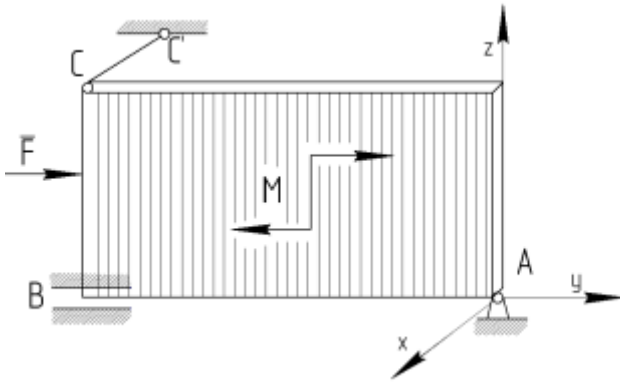
$\bar{F} \parallel A_y, CC' \parallel A_y$

16.



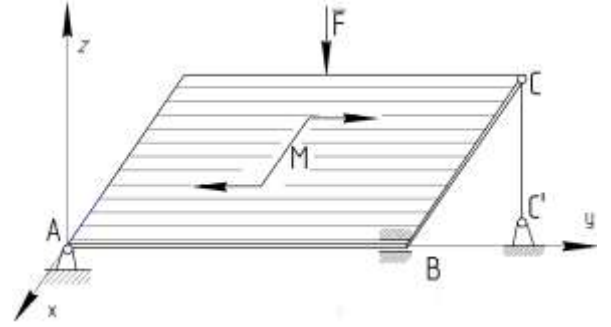
$\bar{F} \parallel A_x, C'B \parallel A_x$

17.



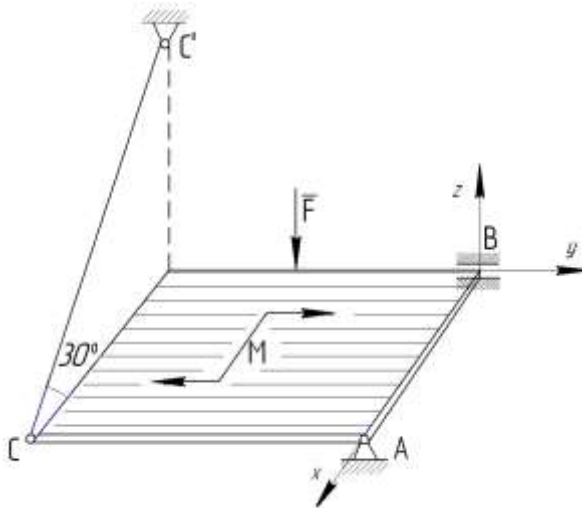
$CC' \parallel A_x, \bar{F} \parallel A_y$

18.



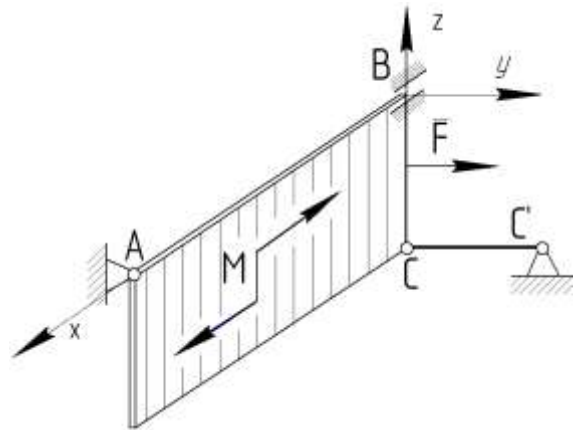
$\bar{F} \parallel A_z, CC' \parallel A_z$

19.



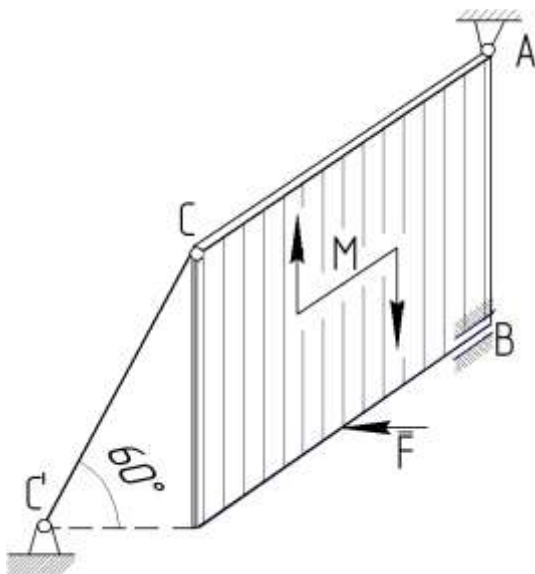
$\bar{F} \parallel B_z$

20.

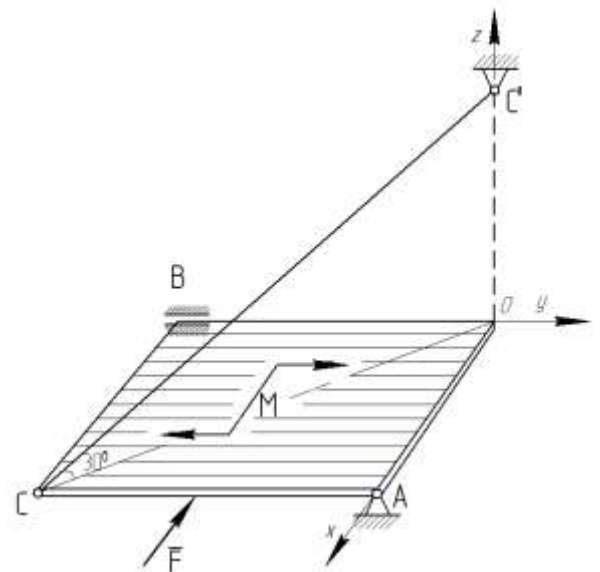


$\bar{F} \parallel B_y$

21.

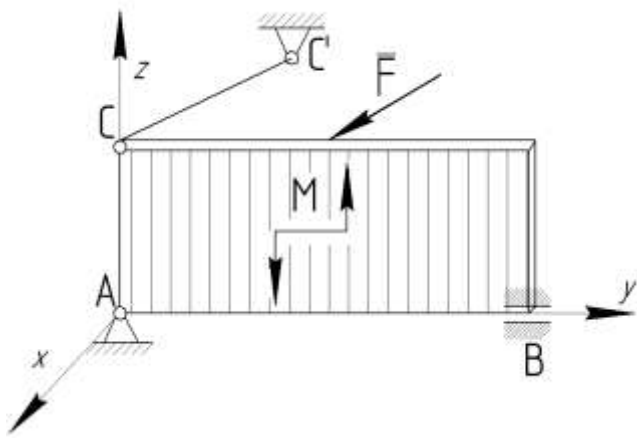


22.



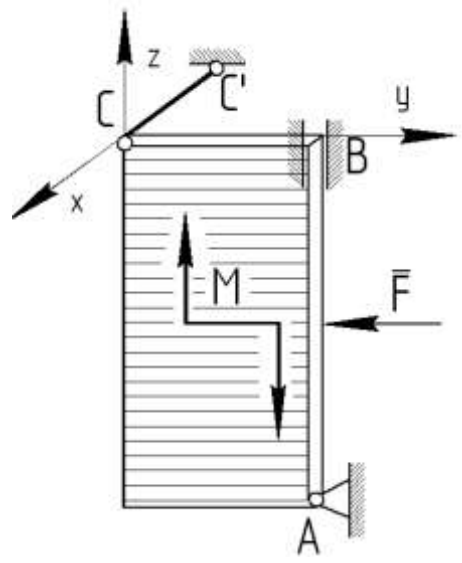
$\bar{F} \parallel O_x$

23.



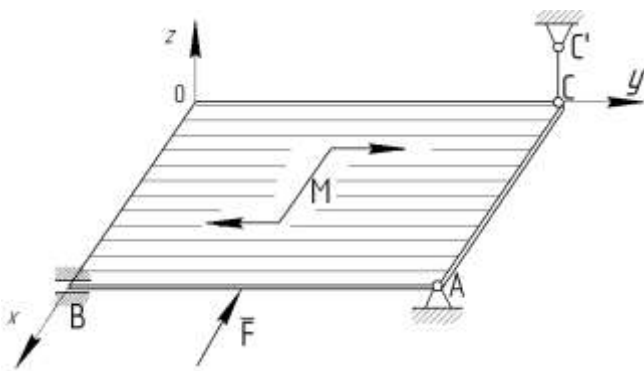
$\bar{F} \parallel A_x, CC' \parallel A_x$

24.



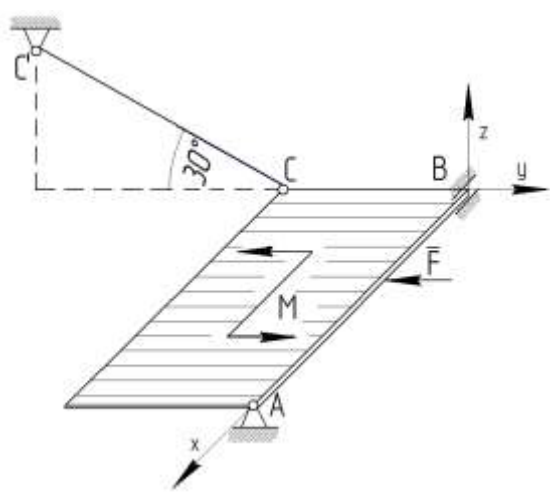
$\bar{F} \parallel B_y$

25.



$\bar{F} \parallel O_x, CC' \parallel O_z$

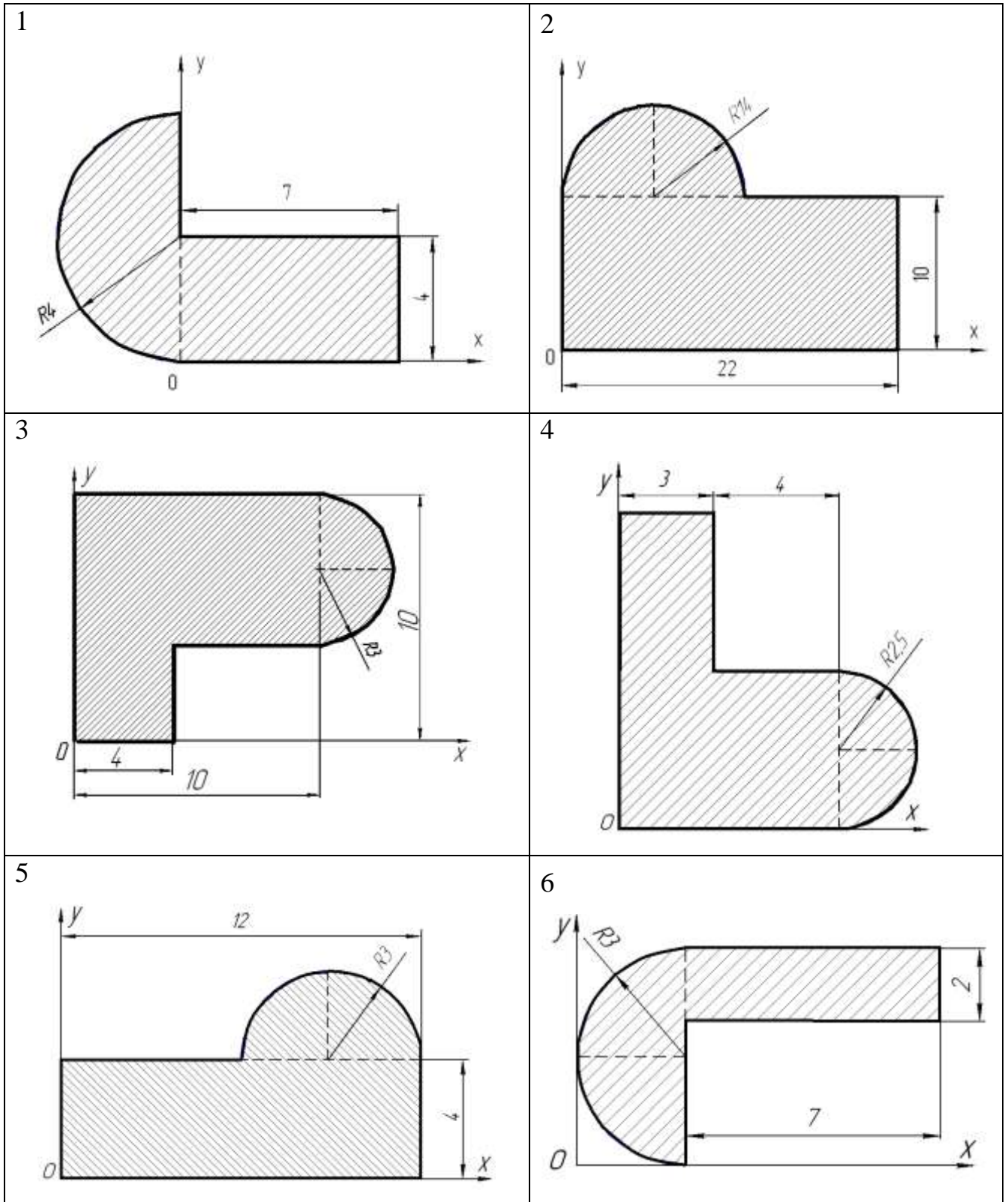
26.



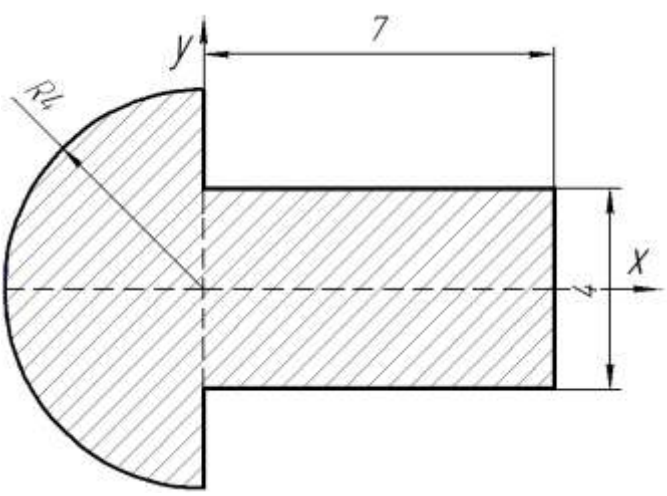
$\bar{F} \parallel B_y$

С-6. Определение центра тяжести

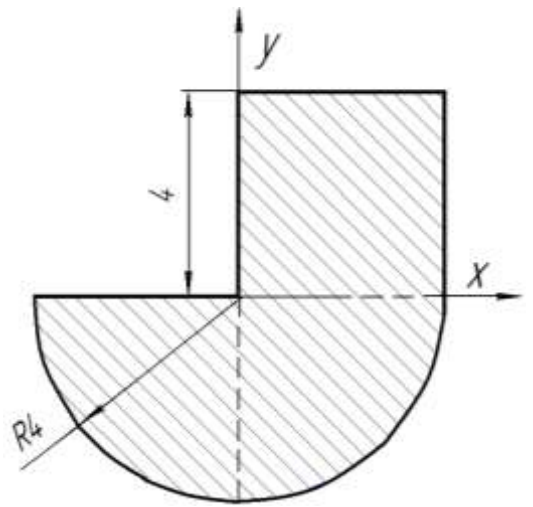
Найти координаты центра тяжести плоской фигуры



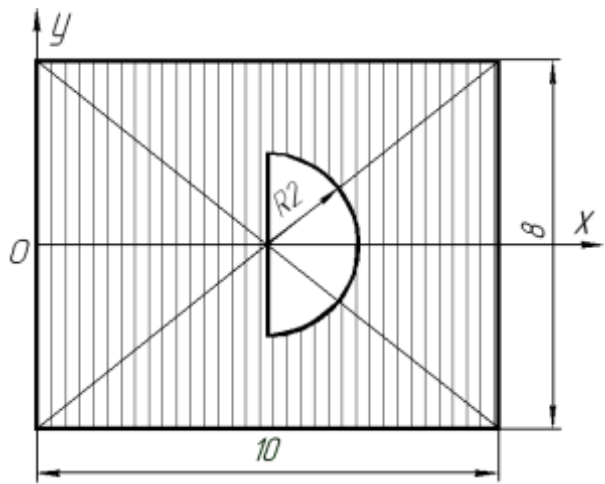
7



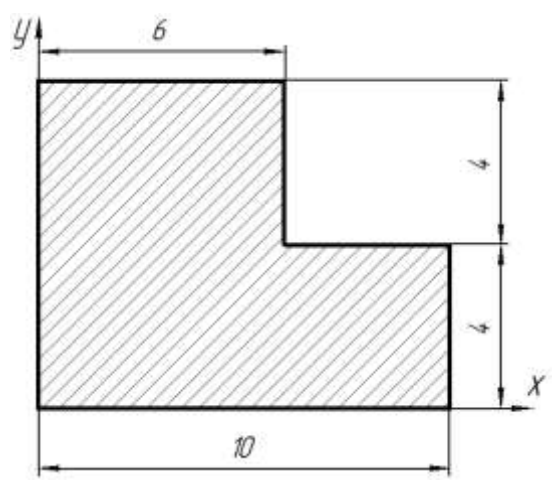
8



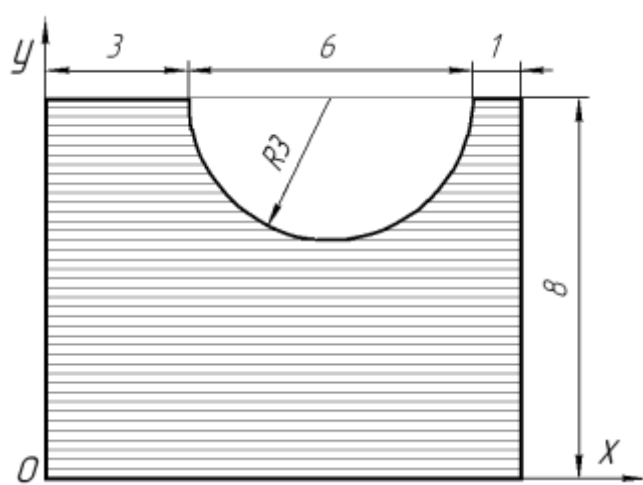
9



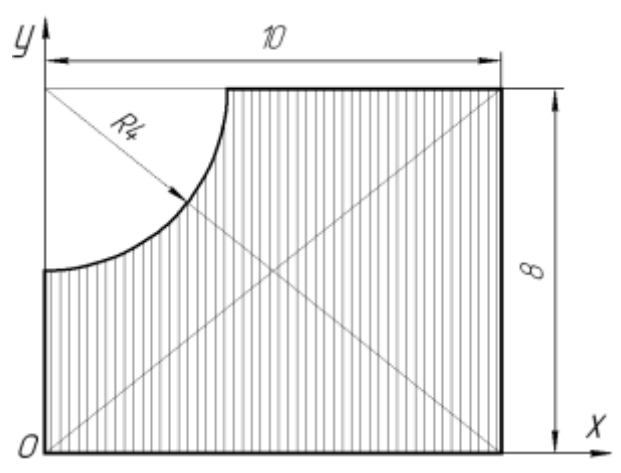
10



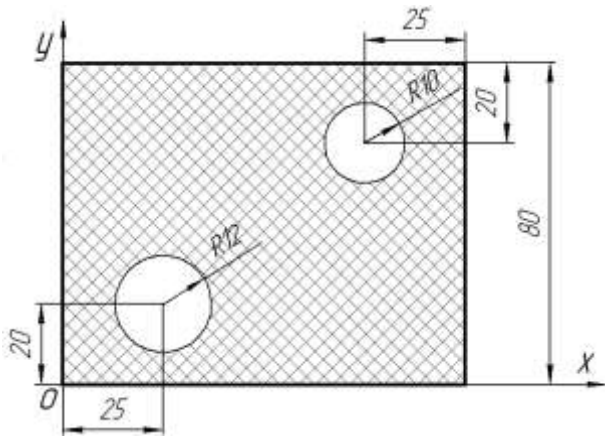
11



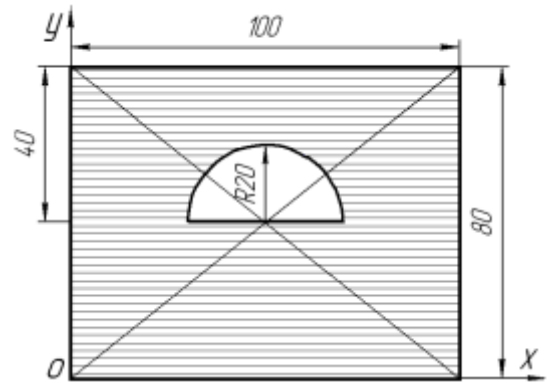
12



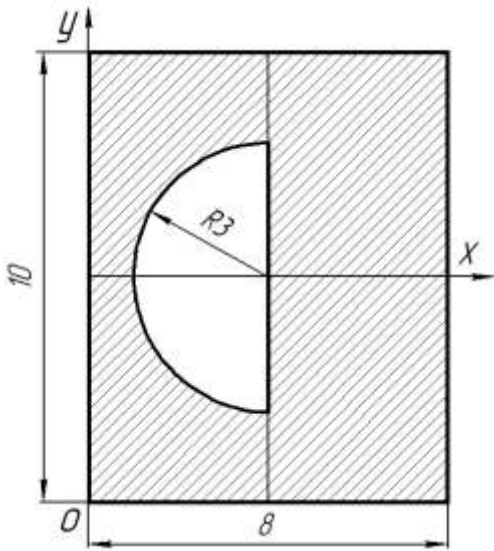
13



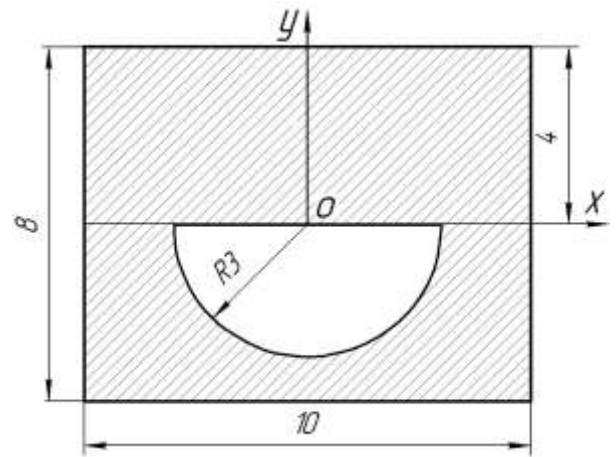
14



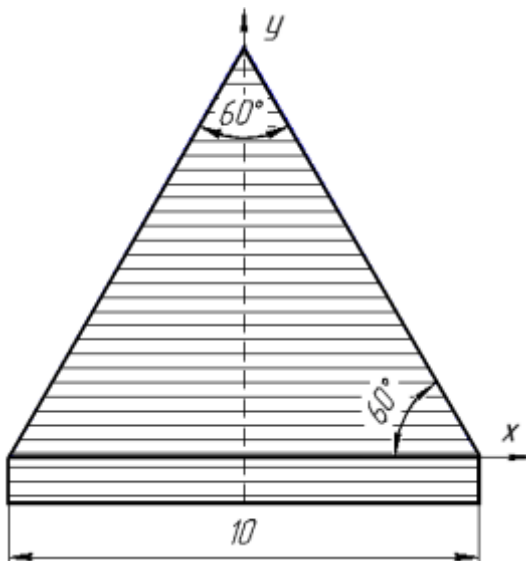
15



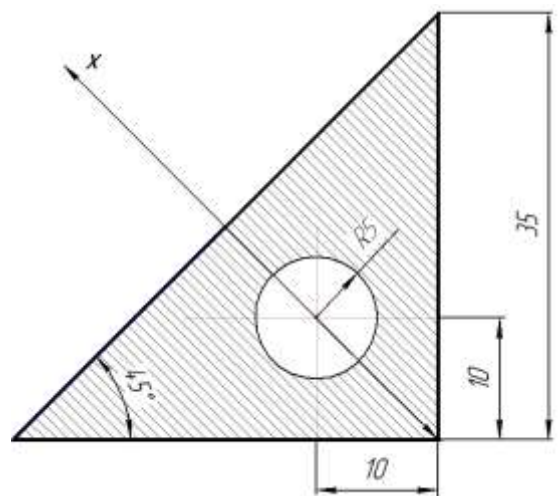
16



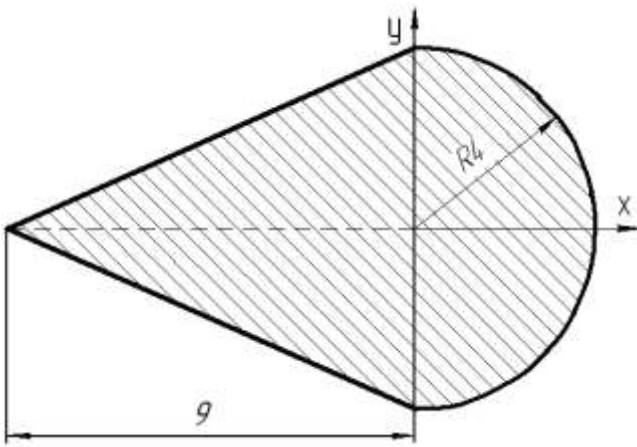
17



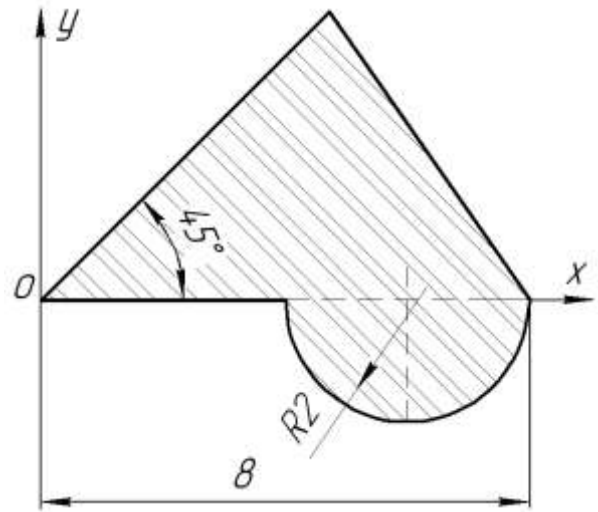
18



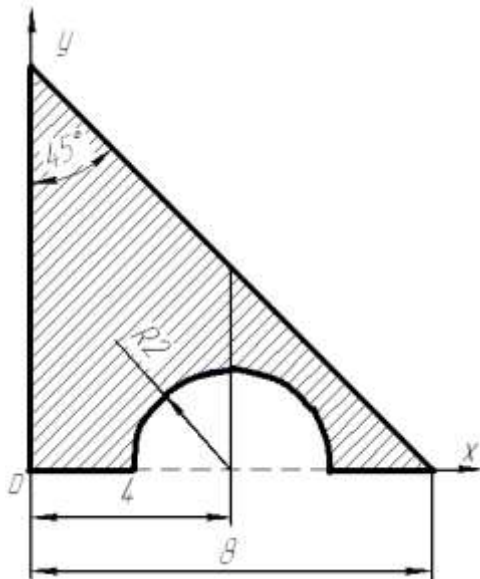
19



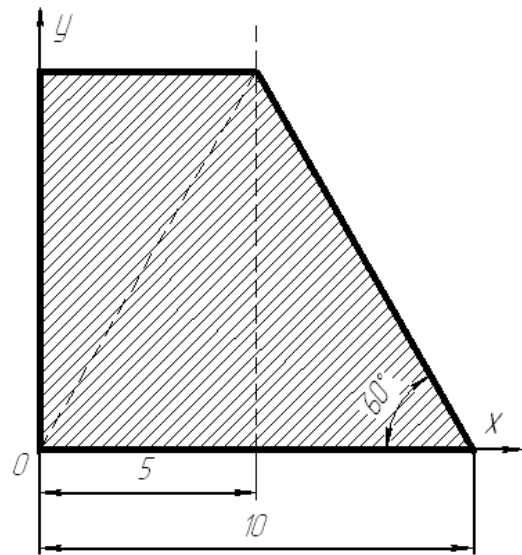
20



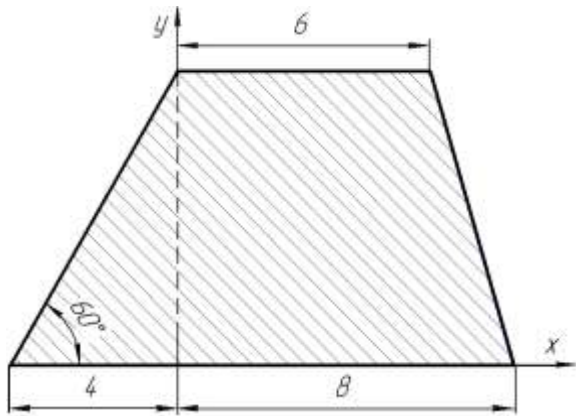
21



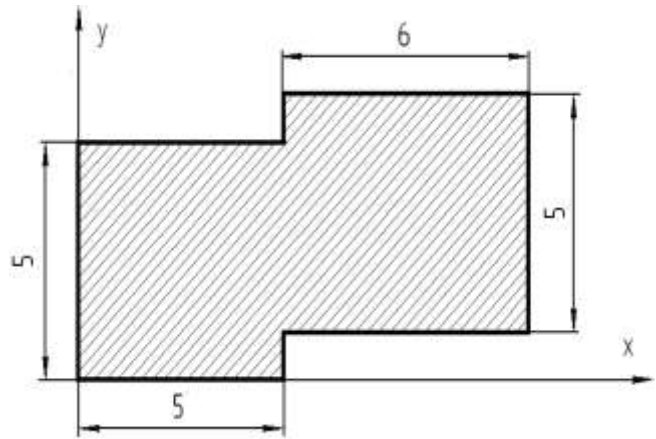
22



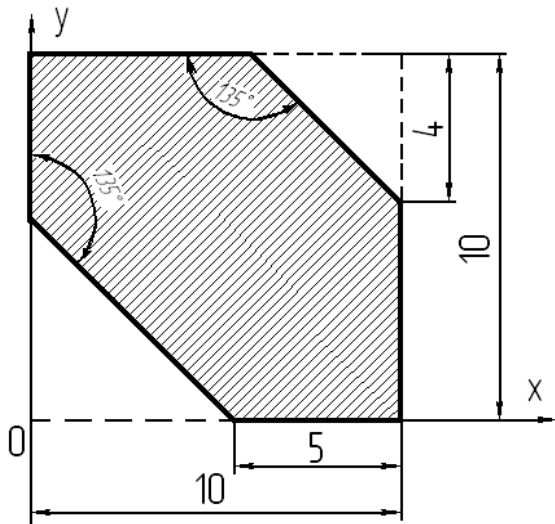
23



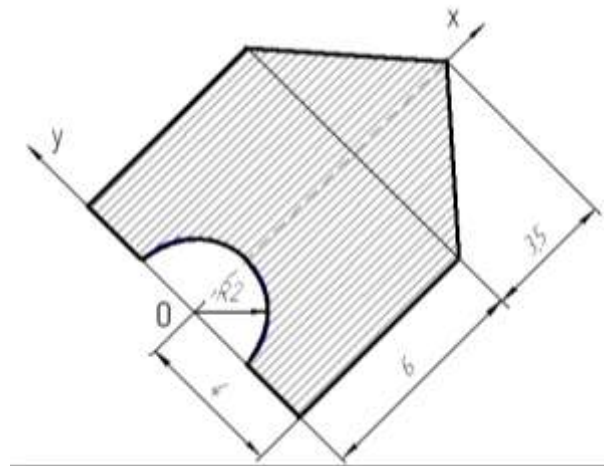
24



25



26



Глава XII
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

§ 37. Система сходящихся сил (С-1)

Задача

Определить усилия в стержнях 1 и 2, если они удерживают груз P весом 1000 Н. углы между стержнями и стеной составляют соответственно $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Весом стержней и тросом пренебречь.

Решение.

1. Рассмотрим систему тел, находящихся в равновесии (рис. 1).

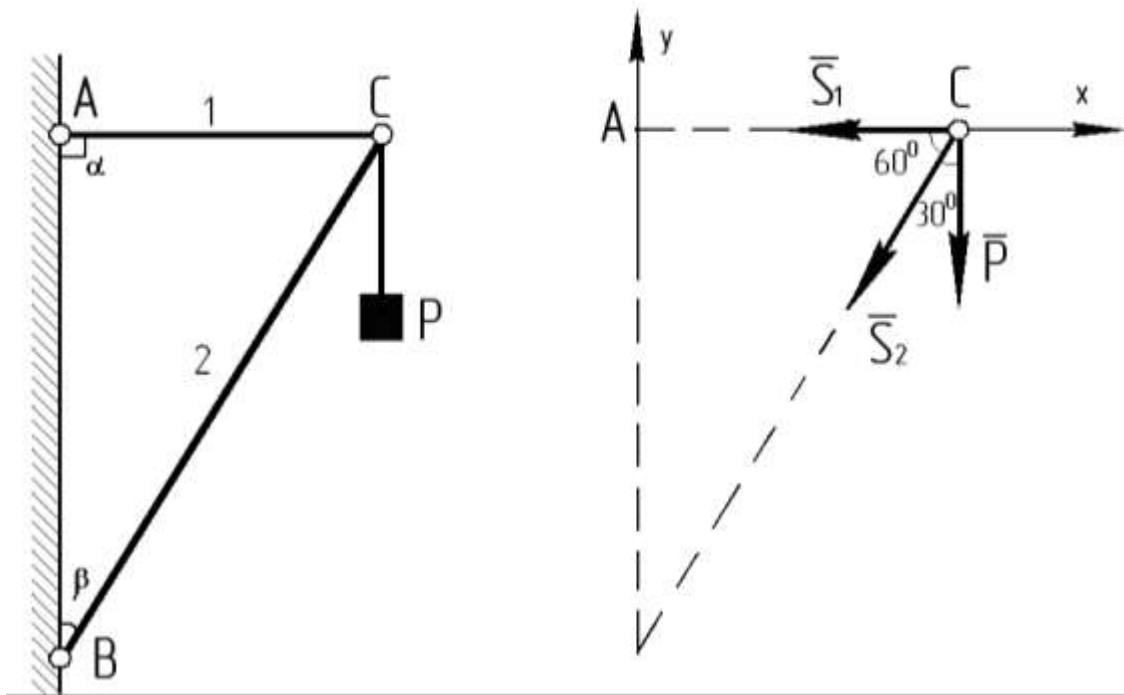


Рис. 1

Рис. 2

Объектом равновесия выбираем шарнир C , так как к нему приложена внешняя нагрузка P . Предполагаем, что стержни 1 и 2 растянуты и направляем реакции \bar{S}_1 и \bar{S}_2 вдоль стержней от шарнира C (рис. 2). Проводим оси координат A_x и A_y . Поскольку на шарнир C действует плоская система сходящихся сил, то аналитическим условием равновесия является:

$$\begin{aligned}\sum F_{KX} = 0, & \quad -S_1 - S_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{KY} = 0, & \quad -P - S_2 \cos 30^\circ = 0.\end{aligned}$$

Решая систему уравнений, получаем $s_1 = 577$ Н, $s_2 = -1155$ Н. Знак "минус" у реакции \bar{s}_2 указывает, что направление силы должно быть противоположным, чем на рис. 2.

2. Графический способ.

В масштабе $1 \text{ см} \div 200 \text{ Н}$ строим (рис. 3) замкнутый силовой многоугольник, начиная с известной силы \bar{P} .

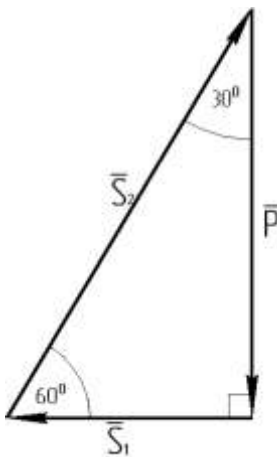


Рис. 3

Длина вектора \bar{P} должна равняться 5 см. Затем через конец вектора \bar{P} проводим горизонтальную прямую, на которой должен лежать вектор \bar{s}_1 . Начало вектора \bar{s}_1 совпадает с концом вектора \bar{P} . А через начало вектора \bar{P} проводим под углом 30° прямую, на которой лежит вектор \bar{s}_2 и строим замкнутый силовой треугольник.

Затем, измеряя отрезки и сравнивая их с масштабом, можно определить приблизительно величины неизвестных сил:

$$s_1 \approx 580 \text{ Н}, \quad s_2 \approx 1140 \text{ Н}.$$

3. Графоаналитический способ.

Здесь также строится силовой треугольник, вычисляя неизвестные стороны по теореме синусов

$$\frac{S_1}{\sin 30^\circ} = \frac{S_2}{\sin 90^\circ} = \frac{P}{\sin 60^\circ}.$$

Откуда получаем $S_1 = 577,4 \text{ Н}$, $S_2 = 1154,7 \text{ Н}$. Этот способ позволяет определить реакции с большой степенью точности.

§ 38. Произвольная плоская система сил (С-2)

Задача

Определить реакции опор A и B однородной балки, находящейся под действием силы $F = 2 \text{ кН}$, равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q = 3 \text{ кН/м}$ и пары сил с моментом $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Схема балки и ее размеры показаны на рис. 4.

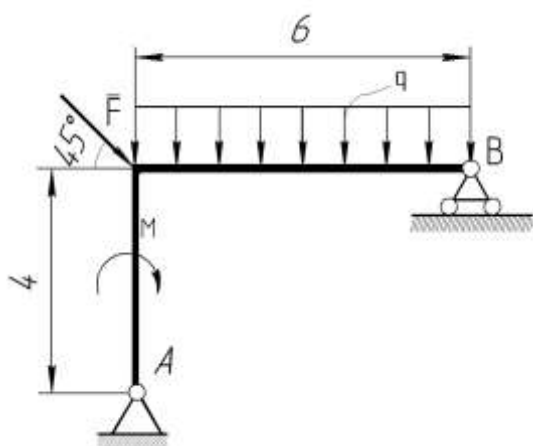


Рис. 4

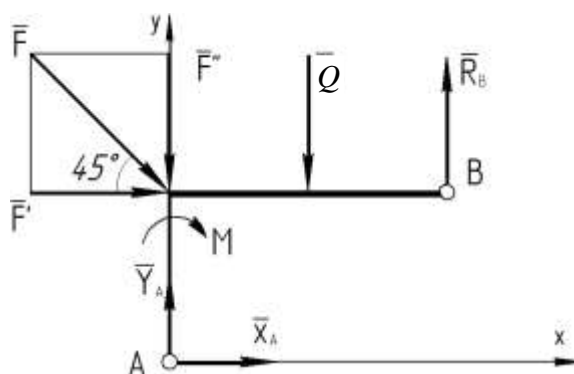


Рис. 5

Решение.

Применяя принцип освобождения от связей, отбросим опоры A и B и введем реакции. Реакция неподвижного цилиндрического шарнира A имеет неизвестное направление и ее следует разложить на две составляющие по осям A_x и A_y . Это будут \bar{X}_A и \bar{Y}_A . Реакция \bar{R}_B подвижного шарнира направлена перпендикулярно поверхности, т.е. вдоль оси A_y .

Распределенную по длине $l = 6 \text{ м}$ нагрузку заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot l = 3 \cdot 6 = 18 \text{ кН}$ (рис. 5).

Для удобства составления уравнений силу \bar{F} заменим ее составляющими \bar{F}' и \bar{F}'' :

$$F' = F'' = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,4 \text{ кН.}$$

На балку действует произвольная плоская систем сил, значит уравнениями равновесия будут:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A + F' = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A - Q - F'' + R_B = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0. \quad R_B \cdot 6 - Q \cdot 3 - F' \cdot 4 - M = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений с тремя неизвестными находим

$$X_A = -1,4 \text{ кН}, \quad R_B = 10,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 8,8 \text{ кН}.$$

Знак "минус" у реакции \bar{X}_A указывает на то, что ее действительное направление противоположно принятому.

Усилие, передаваемое через шарнир A , можно вычислить, складывая реакции:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-1,4)^2 + 8,8^2} = 8,9 \text{ кН}$$

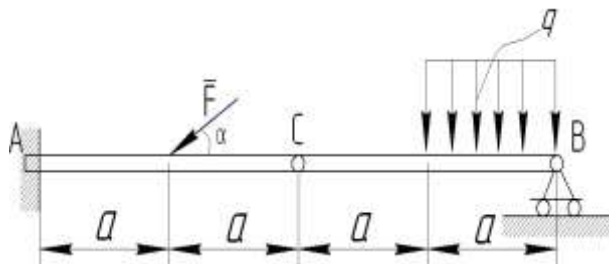
Ответ: $X_A = -1,4 \text{ кН}$, $R_B = 10,6 \text{ кН}$, $Y_A = 8,8 \text{ кН}$.

§ 39. Произвольная плоская система сил (система двух тел) (С-3)

Определить опорные реакции для балочной системы, изображенной на рис. 6, а, если

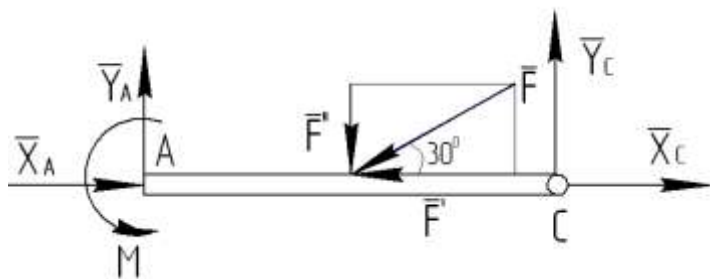
$$F = 10 \text{ кН}, \quad q = 4 \text{ кН/м}, \quad a = 2 \text{ м}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Решение.



а)

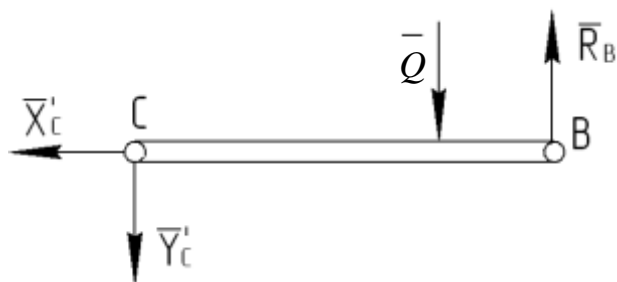
Рассмотрим равновесие каждой балки в отдельности. Мы получаем два твердых тела, на которые действуют реакции внешних связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A , M , \bar{R}_B и попарно равные силы взаимодействия $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C$, $\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$.



б)

Общее число неизвестных реакций равно шести.

Составим уравнений равновесия для левой балки AC (рис. 6, б):



в)

$$\sum F_{KX} = X_A + X_C - F' = 0,$$

$$\sum F_{KY} = Y_A + Y_C - F'' = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = M - F'' \cdot a + Y_C \cdot 2a = 0.$$

Уравнения равновесия для балки CB (рис. 6, в) будут:

$$\sum F'_{KX} = -X'_C = 0,$$

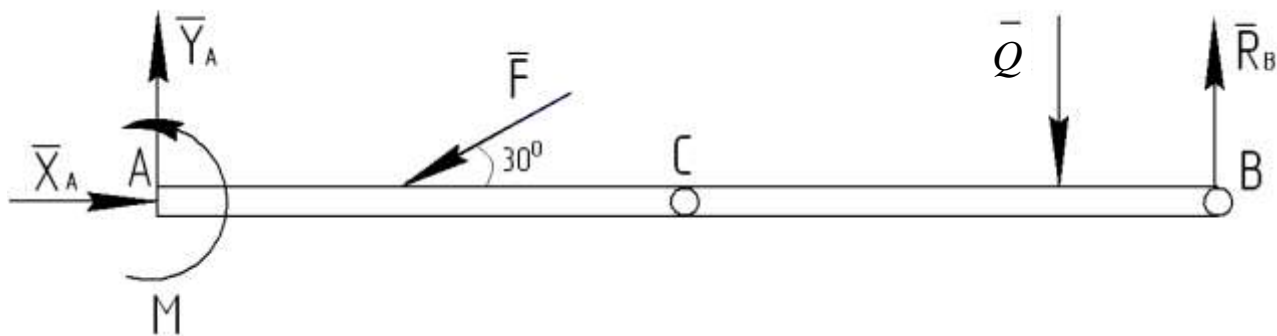
$$\sum F'_{KY} = R_B - Q - Y'_C = 0,$$

$$\sum m_C(\bar{F}'_K) = R_B \cdot 2a - Q \cdot 1,5a = 0.$$

Заменяя в последней системе $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$ и затем решая полученную систему уравнений, и учитывая, что $Q = q \cdot l = 4 \cdot 2 = 8$ кН, $F' = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ кН, $F'' = F \cdot \sin 30^\circ = 5$ кН получим $X_C = 0$, $X_A = 8,7$ кН, $R_B = 6$ кН, $Y_C = -2$ кН, $Y_A = 9$ кН, $M = 25$ кН·м.

Эту задачу можно решить и другим способом, если рассмотреть равновесие всей составной конструкции и какой-либо одной ее части (рис. 7).

a)



б)

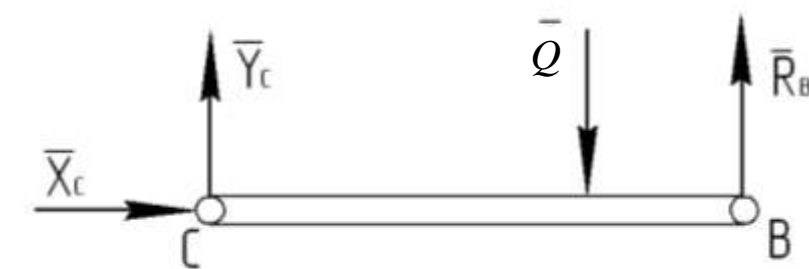


Рис. 7

Составим уравнения равновесия для всей составной конструкции (рис. 7, а)

$$\sum F_{KX} = X_A - F \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{KY} = Y_A - F \cdot \cos 60^\circ - Q + R_B = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = M + R_B \cdot 8 - Q \cdot 7 - F \cdot (\cos 60^\circ) \cdot 2 = 0.$$

И составим уравнения равновесия для балки CB:

$$\sum F_{KX} = X_C = 0,$$

$$\sum F_{KY} = Y_C - Q + R_B = 0,$$

$$\sum m_C(\bar{F}_K) = R_B \cdot 4 - Q \cdot 3 = 0.$$

Из рисунка 7, а, б видно, что в систему шести уравнений входят шесть неизвестных реакций $X_A, Y_A, R_B, M, X_C, Y_C$. Решая эту систему шести уравнений получаем:

$$X_C = 0, R_B = 6 \text{ кН}, Y_C = -2 \text{ кН}, X_A = 8,7 \text{ кН}, Y_A = 9 \text{ кН}, M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Значения реакций такие же, как и в первом случае.

§ 40. Плоская система сил с учетом трения скольжения (С-4)

Механизм состоит из однородного тонкого стержня длиной $l=2$ м и весом $G = 8$ кН и двух невесомых ползунов A и B , которые могут перемещаться по направляющим. На стержень действует еще пара сил с моментом $M=6$ кН·м и сила \bar{F} , значение которой надо определить. Коэффициент трения ползуна A по направляющей $f=0,2$. Трение у ползуна B отсутствует.

Решение. Покажем на рисунке силы, действующие на стержень (рис. 8)

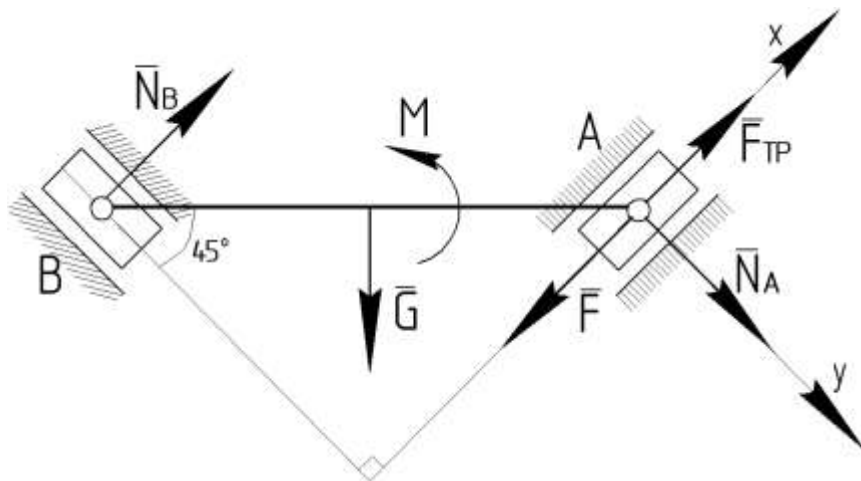


Рис. 8

\bar{G} - вес стержня;

\bar{F}_{TP} - сила трения;

\bar{F} - уравновешивающая сила;

\bar{N}_A и \bar{N}_B - силы реакции;

M - момент пары сил.

Уравнениями равновесия механизма будут:

$$\sum F_{KX} = 0, \quad F_{TP} - F - G \cdot \cos 45^\circ + N_B = 0,$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad N_A + G \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0. \quad M + G \cdot \frac{l}{2} - N_B \cdot l \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

где $F_{TP} = f \cdot N_A$. Система трех уравнений имеет три неизвестные F, N_A, N_B .

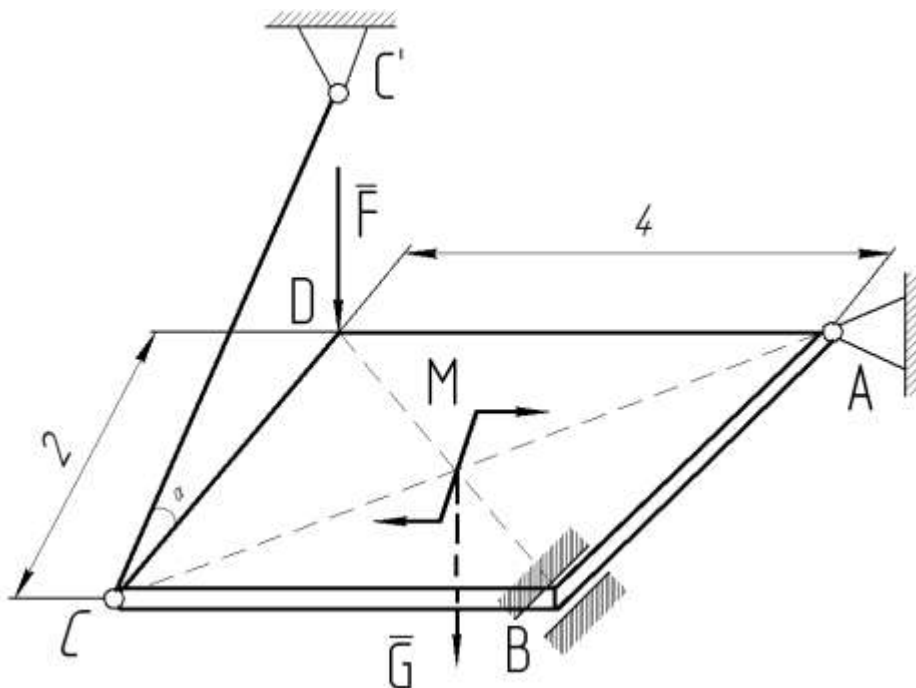
Решая эту систему, определяем неизвестные

$$N_A = -5,6 \text{ кН}, \quad N_B = 10 \text{ кН}, \quad F = 3,28 \text{ кН}$$

Ответ: $F = 3,3 \text{ кН}$

§ 41. Пространственная система сил (С-5)

Плита весом $G = 2 \text{ кН}$ закреплена на трех опорах: сферический шарнир A , подшипник B и стержень CC' . На плиту действует сила $F = 4 \text{ кН}$ и пара сил с моментом $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Размеры плиты даны в метрах (рис. 9). Определить величины реакций опор, если угол $\alpha = 30^\circ$.



$\bar{F} \perp AD$
 $CC' \perp CB$

Рис. 9

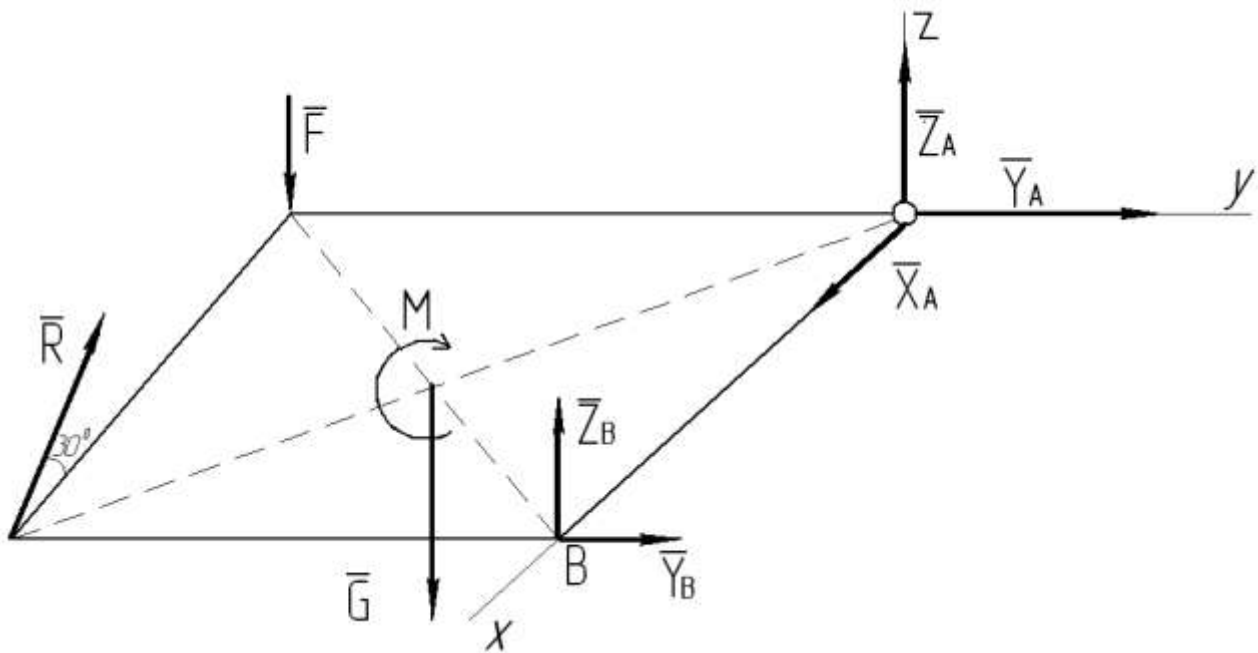


Рис. 10

Решение.

Воспользовавшись принципом освобождения от связей, вводим реакции опор:

$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ - реакции сферического шарнира;

\bar{Y}_B, \bar{Z}_B - реакции подшипника;

\bar{R} - реакция стержня.

На плиту действует произвольная пространственная система сил, поэтому составляем шесть уравнений равновесия

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A - R \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{KZ} = 0, \quad Z_A - F - G + R_B \cdot \sin 30^\circ + Z_B = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_K) = 0; \quad G \cdot 2 + F \cdot 4 - R \cdot (\sin 30^\circ) \cdot 4 = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_K) = 0; \quad G \cdot 1 - Z_B \cdot 2 - R(\sin 30^\circ) \cdot 2 = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_K) = 0, \quad Y_B \cdot 2 - R \cdot (\cos 30^\circ) \cdot 4 - M = 0. \quad (6)$$

Система шести уравнений имеет шесть неизвестных, т.е. система статически определима.

Подставив известные данные определяем из уравнения (4) значение \bar{R} , $\bar{R} = 10$ кН; из уравнения (6) определяем $Y_B = 17,3$ кН; из (5) уравнения $Z_B = -4$ кН, $X_A = 8,7$ кН, $Y_A = -17,3$ кН, $Z_A = 5$ кН

Ответ: $X_A = 8,7$ кН, $Y_A = -17,3$ кН, $Z_A = 5$ кН, $Y_B = 17,3$ кН,

Знаки "минус" говорят о том, что реакции \bar{Y}_A, \bar{Z}_B имеют противоположные направления, чем на чертеже.

§ 42. Определение центра тяжести (С-6)

Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, изображенной на рис. 11.

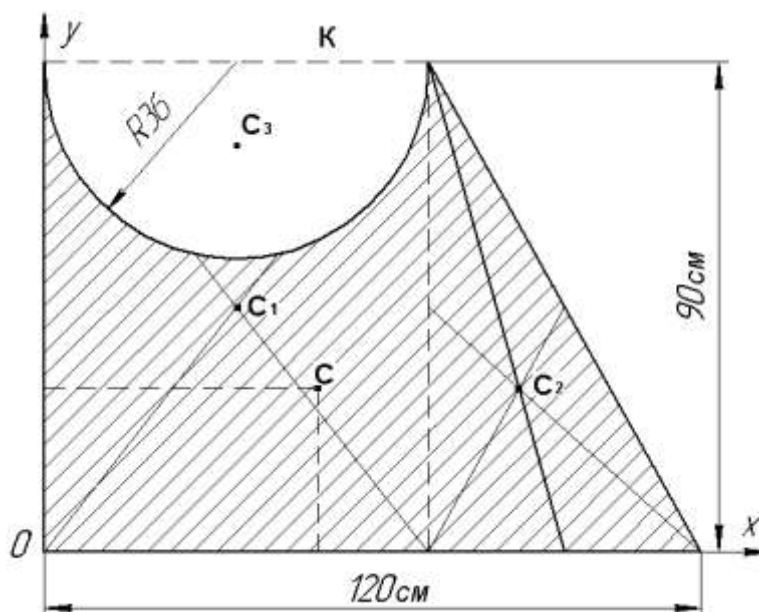


Рис. 11

Решение.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются по формулам

$$X_C = \frac{\sum S_K \cdot X_K}{S}; \quad Y_C = \frac{\sum S_K \cdot Y_K}{S}. \quad (1)$$

Теперь делим фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади S_K и координаты центров тяжести X_K и Y_K .

В данной задаче в качестве таких частей принимается прямоугольник, треугольник и половина круга (рис. 11). Площадь половины круга, вырезанной из прямоугольника, считаем отрицательной.

Тогда формулы (1) примут вид:

$$X_C = \frac{S_1 \cdot X_1 + S_2 \cdot X_2 - S_3 \cdot X_3}{S}; \quad Y_C = \frac{S_1 \cdot Y_1 + S_2 \cdot Y_2 - S_3 \cdot Y_3}{S}. \quad (2)$$

Найдем значения этих величин

$$S_1 = 90 \cdot 72 = 6480 \text{ см}^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 48 = 2160 \text{ см}^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \pi R^2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 36^2 = 2034,7 \text{ см}^2,$$

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 6480 + 2160 - 2034,7 = 6605,3 \text{ см}^2$$

$$X_1 = 36 \text{ см}; \quad X_2 = 88 \text{ см}; \quad X_3 = 36 \text{ см}$$

$$Y_1 = 45 \text{ см}; \quad Y_2 = 30 \text{ см}; \quad Y_3 = 90 - KC_3,$$

$$\text{где } KC_3 = \frac{2R \cdot \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2 \cdot 36 \cdot 1}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = 15,3 \text{ см}; \quad Y_3 = 74,7 \text{ см}.$$

По формулам (2) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$X_C = 53 \text{ см}; \quad Y_C = 30,9 \text{ см}.$$

§43. Терминологический минимум

Аксиомы статики

Вектор главный системы сил

Вектор свободный

Вектор скользящий

Вес тела

Взаимодействие механическое

Винт динамический

Задача статически неопределенная

Задача статически определенная

Заделка жесткая

Закон равенства действия и противодействия

Закон параллелограмма сил

Закон Ньютона

Закон трения скольжения

Интенсивность

Кинематика

Метод вырезания узлов

Метод сечений (метод Риттера)

Механика

Механика теоретическая

Многоугольник силовой

Момент главный системы сил

Момент пары сил

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки алгебраической

Ньютон (единица измерения)

Пара сил

Плечо пары сил
Плечо силы относительно центра
Поле силовое
Приведение системы сил к данному центру
Принцип отвердевания
Проекция силы на ось
Проекция силы на плоскость
Равновесие
Равновесие при наличии трения
Равновесие при наличии трения предельное
Равновесие плоской системы сил
Равновесие пространственной системы сил
Равновесие системы сходящихся сил
Равновесие системы тел
Равнодействующая системы сил
Реакции связей
Самоторможение
Связи
Сила
Сила внешняя
Сила внутренняя
Сила распределенная
Сила сосредоточенная
Сила сцепления
Сила трения предельная
Сила скольжения
Сила тяжести
Сила уравнивающая
СИ - система единиц международная
Система координат правая

Система отсчета
Система сил
Система сил уравновешенная
Система сил эквивалентная нулю
Система тел статически неопределимая
Система тел статически определимая
Сложение пар сил
Сложение сил
Статика
Тело абсолютно твердое
Тело несвободное
Тело свободное
Теорема Вариньона
Теорема о параллельном переносе силы
Теорема о трех силах
Точка материальная
Трение
Трение качения
Трение скольжения
Угол трения
Усилия внутренние
Центр параллельных сил
Центр тяжести

ГЛОССАРИЙ

Аксиома – самоочевидная истина, не требующая доказательств.

Вектор – величина, характеризующаяся не только числовым значением, но и направлением.

Вес – величина векторная, равная $\vec{p} = \vec{mg}$.

Главный вектор – вектор, равный геометрической сумме всех сил.

Главный момент – величина M_0 , равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O .

Декартова система координат – три взаимно перпендикулярные оси, выходящие из одной точки.

Единицы измерения – системы единиц.

Интенсивность нагрузки – это плоская система распределенных сил, характеризующая силу, приходящуюся на единицу длины нагруженного отрезка.

Конус трения – геометрическое место всех возможных направлений силы F , при которых тело остается в равновесии, образует коническую поверхность – конус трения; угол при его вершине равен 2α , где $\operatorname{tg}\alpha = f$.

Коэффициент трения – величина f , равная $f = \frac{F_{mp}}{N}$

Материальная точка – это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Механическое взаимодействие – действие материальных тел друг на друга.

Момент пары сил – это вектор, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на её плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.

Момент силы относительно оси – равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси.

Момент силы относительно центра $m_0(\bar{F}) = \pm Fh$. Алгебраический момент силы F относительно центра O равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на её плечо.

Несвободное тело. Тело, перемещению которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие тела.

Плечо силы – длина перпендикуляра, восстановленного из моментной точки к линии действия силы.

Приведение системы сил – это преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные, в частности к простейшему виду.

Проекция вектора. Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$

Проекция силы на плоскость есть вектор.

Равнодействующая сила. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей.

Разложение сил. Разложить данную силу на несколько составляющих – значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей.

Распределенная нагрузка. Плоская система распределенных сил характеризуется её интенсивностью g , т.е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Реакция связи. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой связи.

Связь. Всё то, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве, называют связью.

Свободное тело. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется свободным.

Сила внешняя. Внешними называются силы, которые действуют на тело со стороны других тел.

Сила внутренняя. Это силы, с которыми части тела действуют друг на друга.

Сила тяжести. $\vec{P} = \vec{m}g$. Это постоянная сила \vec{p} , действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности.

Сила трения. $F = f N$, где f – коэффициент трения; N – сила нормального давления.

Сила тяготения. $F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$, $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$ – гравитационная постоянная.

Сила трения предельная. $F_{пр} = f_0 N$, где f_0 – статический коэффициент трения; N – сила нормального давления.

Сила центральная. Центральной называется сила, линия действия которой происходит все время через данный центр.

Система сил. Это совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело.

Система тел. Под системой тел понимают конструкции, состоящие из 2 и более тел.

Сложение сил. Под операцией сложения сил понимают геометрическую сумму (главный вектор) сил какой-нибудь системы.

Сосредоточенная сила. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точки, называется сосредоточенной.

Статическая неопределенность. Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащие эти реакции, называются статически неопределенными, а системы тел (конструкции) для которых это имеет место – статически неопределенными.

Твердое тело. Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояние между двумя точками которого всегда остается постоянным.

Теорема Вариньона: момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Теорема о трёх силах: если твердое тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия сил пересекаются в одной точке.

Трение качения – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Угол трения. Наибольший угол φ , который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр}}}{N}, \operatorname{tg} \varphi = f$$

Ферма. Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 2002.
2. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. М., 2002.
3. Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: Учебное пособие. -Спб., 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА	5
Глава I	5
§ 1. Основные понятия и определения статики.....	5
§ 2. Аксиомы статики.....	9
§ 3. Связи и их реакции	11
Глава II. СЛОЖЕНИЕ СИЛ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ.....	17
§ 4. Распределение силы.....	17
§ 5. Геометрический способ сложения и разложения сил. Равнодействующая сходящихся сил	19
§ 6. Проекция силы на ось и на плоскость.....	21
§ 7. Аналитический способ задания сил	22
§ 8. Аналитический способ сложения сил.....	23
§ 9. Равновесие системы сходящихся сил	25
§ 10. Теорема о трех силах	26
§ 11. Решение задач статики.....	28
Глава III. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. ПАРА СИЛ.	30
§ 12. Момент силы относительно центра (точки).....	30
§ 13. Пара сил. Момент пары	31
§ 14. Теоремы об эквивалентности и о сложении пар	33
Глава IV. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ.	36
§ 15. Теорема о параллельном переносе силы (Лемма Пуансо)	36
§ 16. Приведение системы сил к данному центру	37
§ 17. Условие равновесия системы сил. Теорема о моменте равнодействующей .	39
Глава V. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ	41
§ 18. Алгебраические моменты силы и пары.....	41
§ 19. Приведение плоской системы сил к простейшему виду	42

§ 20. Равновесие плоской системы сил	44
§ 21. Равновесие плоской системы параллельных сил	45
§ 22. Решение задач	45
§ 23. Равновесие систем тел.....	48
§ 24. Расчет плоских ферм	51
Глава VI. ТРЕНИЕ.....	56
§ 25. Трение скольжения	56
§ 26. Реакция шероховатых связей. Угол и конус трения	58
§ 27. Трение нити о цилиндрическую поверхность	60
§ 28. Трение качения	62
Глава VII. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ.....	65
§ 29. Момент силы относительно оси.	65
Главный вектор и главный момент системы сил.....	65
§ 30. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду	68
§ 31. Равновесие произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил	70
Глава VIII. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ	73
§ 32. Центр параллельных сил	73
§ 33. Силовое поле. Центр тяжести твердого тела.....	75
§ 34. Координаты центров тяжести однородных тел.....	76
§ 35. Способы определения координат центров тяжести тел.....	77
§ 36. Центры тяжести некоторых однородных тел.....	80
Глава IX. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	83
Глава X. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СТАТИКЕ	86
Глава XI. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	96
С-1. Система сходящихся сил	96
С-2. Произвольная плоская система сил.....	101
С-3. Плоская система сил (система двух тел).....	108
С-4. Система сил при наличии трения	112
С-5. Пространственная система сил	116

С-6. Определение центра тяжести.....	121
Глава XII. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ.....	126
§ 37. Система сходящихся сил (С-1).....	126
§ 38. Произвольная плоская система сил (С-2).....	128
§ 39. Произвольная плоская система сил (система двух тел) (С-3).....	129
§ 40. Плоская система сил с учетом трения скольжения (С-4)	132
§ 41. Пространственная система сил (С-5).....	133
§ 42. Определение центра тяжести (С-6)	135
§43. Терминологический минимум.....	137
ГЛОССАРИЙ.....	140
ЛИТЕРАТУРА	144

Учебное издание

Валерий Николаевич Блохин

Наталья Афанасьевна Вerezубова

Теоретическая механика

Раздел «Статика»

Редактор Павлютина И.П.

Подписано в печать 12.02.2013 г. Формат 60x84 1/16.

Изд. № 2293. Тираж 60. Усл.п.л. 8,60.

Брянская государственная сельскохозяйственная академия. 243365
Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА.